

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 11****Produit scalaire**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les quatre capacités du chapitre, dans l'ordre du cours. Chaque capacité s'ouvre sur un rappel, puis les exercices vont du calcul guidé à la recherche autonome et au contrôle d'un résultat. Écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec son unité quand la grandeur en a une. Calculatrice en mode **degrés**. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées dans un repère orthonormé	1 à 6	2
C4 – Reconnaître des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormé	7 à 12	4
C2 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle pour calculer un produit scalaire ou déterminer un angle	13 à 19	6
C3 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes de la somme et les propriétés du produit scalaire pour déterminer une longueur	20 à 26	9

C1, C2 et C3 détaillent la capacité du programme « Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles » ; C4 est la seconde capacité du programme.

C1 – Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées dans un repère orthonormé

Exigible. Prérequis : coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et norme (Première).

Rappel de cours

Dans un repère orthonormé, pour $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

Le résultat est un **nombre**. Pour $\overrightarrow{AB}$, faire « arrivée moins départ » : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Exercice 1 — Compléter le calcul

Dans un repère orthonormé, compléter chaque calcul puis donner le résultat.

- $\vec{u}(3; 5)$ et $\vec{v}(2; -1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times \dots + 5 \times \dots = \dots$
- $\vec{u}(-4; 2)$ et $\vec{v}(1; 3)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots \times 1 + \dots \times 3 = \dots$
- $\vec{u}(0; 7)$ et $\vec{v}(6; -2)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots \times \dots + \dots \times \dots = \dots$
- $\vec{u}(-3; -2)$ et $\vec{v}(-5; 4)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots = \dots$

Correction de l'exercice 1

- $3 \times 2 + 5 \times (-1) = 6 - 5 = 1$.
 - $(-4) \times 1 + 2 \times 3 = -4 + 6 = 2$.
 - $0 \times 6 + 7 \times (-2) = 0 - 14 = -14$.
 - $(-3) \times (-5) + (-2) \times 4 = 15 - 8 = 7$.
- Erreur fréquente : au d., $(-3) \times (-5)$ est positif.

Exercice 2 — Trois vecteurs issus des sommets d'un triangle

On donne les points $A(2; 1)$, $B(6; 3)$ et $C(1; 5)$ dans un repère orthonormé.

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Calculer de même $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Correction de l'exercice 2

- $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 4)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 8 = 4$.
- $\overrightarrow{BA} = (-4; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-5; 2)$: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20 - 4 = 16$. $\overrightarrow{CA} = (1; -4)$, $\overrightarrow{CB} = (5; -2)$: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 + 8 = 13$.

Contrôle possible : les trois produits sont positifs, les trois angles du triangle sont aigus.

Exercice 3 — Longueurs sur le plan d'un atelier

Sur le plan d'un atelier, dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre, on repère l'établi $P(1; 2)$, la scie $Q(7; 10)$ et l'armoire $R(4; -2)$.

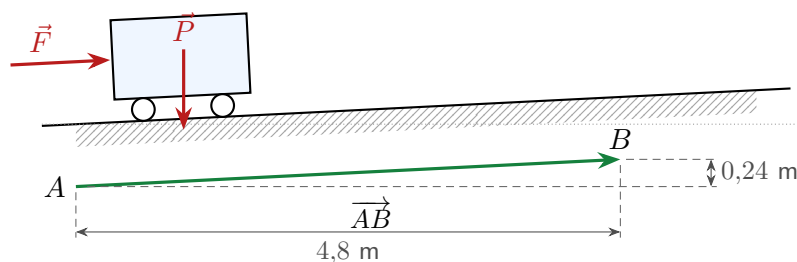
- Calculer $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}$ et en déduire la distance PQ .
- Même travail pour la distance PR .
- Calculer $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$. Que dit son signe de l'angle $\widehat{QPR}$?

Correction de l'exercice 3

- $\overrightarrow{PQ} = (6; 8)$: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 36 + 64 = 100 = PQ^2$, donc $PQ = 10$ m.
- $\overrightarrow{PR} = (3; -4)$: $9 + 16 = 25$, donc $PR = 5$ m.
- $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 18 - 32 = -14$: il est négatif, donc l'angle $\widehat{QPR}$ est **obtus**.

Exercice 4 — Un chariot sur une rampe

Un chariot chargé est poussé de A à B sur une rampe. Dans un repère orthonormé (unité : le mètre, axe des y vers le haut), $\overrightarrow{AB}(4,8; 0,24)$. Le poids du chariot est $\vec{P}(0; -600)$ et la poussée est $\vec{F}(90; 4,5)$, en newtons.



Vue de côté du chariot au départ de la rampe. La poussée $\vec{F}$ est parallèle à la rampe, le poids $\vec{P}$ vertical ; le déplacement $\overrightarrow{AB}$ avance de 4,8 m et monte de 0,24 m.

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ sur le déplacement $\overrightarrow{AB}$ est $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, en joules.

- Calculer le travail du poids.
- Calculer le travail de la poussée.
- Expliquer le signe de chacun des deux résultats.

Correction de l'exercice 4

- $W_{AB}(\vec{P}) = 0 \times 4,8 + (-600) \times 0,24 = -144$ J.
- $W_{AB}(\vec{F}) = 90 \times 4,8 + 4,5 \times 0,24 = 432 + 1,08 = 433,08$ J.
- Le poids est dirigé vers le bas alors que le chariot monte : il **s'oppose** au déplacement, son travail est négatif. La poussée est dans le sens du déplacement : son travail est positif. On retrouve $-144 = -600 \times 0,24$: le travail du poids ne dépend que de la hauteur gagnée.

Exercice 5 — Retrouver une coordonnée

- On donne $\vec{u}(x; 4)$ et $\vec{v}(3; -2)$, avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$. Écrire l'équation vérifiée par x , puis la résoudre.
- On donne $\vec{a}(2; y)$ et $\vec{b}(-1; 3)$, avec $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Trouver y et vérifier.

Correction de l'exercice 5

- $3x + 4 \times (-2) = 7$, soit $3x - 8 = 7$, $3x = 15$ et $x = 5$. Vérification : $5 \times 3 + 4 \times (-2) = 15 - 8 = 7$.
- $2 \times (-1) + 3y = 10$, soit $3y = 12$ et $y = 4$. Vérification : $-2 + 12 = 10$.

Exercice 6 — Deux copies à corriger

On donne $\vec{u}(-2; 5)$ et $\vec{v}(3; -4)$.

Copie de Sami : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times 5 + 3 \times (-4) = -10 - 12 = -22$.

Copie d'Inès : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ((-2) \times 3; 5 \times (-4)) = (-6; -20)$.

- Quelle erreur chacun a-t-il commise ?
- Calculer correctement $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Correction de l'exercice 6

- Sami a multiplié les deux coordonnées d'un **même** vecteur, au lieu de multiplier les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles. Inès a bien multiplié, mais elle n'a pas additionné : elle écrit un couple, alors que le produit scalaire est un **nombre**.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times 3 + 5 \times (-4) = -6 - 20 = -26$.

C4 – Reconnaître des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormé

Exigible. Prérequis : C1 ; test de colinéarité (Première).

Rappel de cours

Deux vecteurs sont **orthogonaux** (directions perpendiculaires) si, et seulement si,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' = 0.$$

Pour un angle droit, écrire les deux vecteurs **à partir du sommet**. À ne pas confondre avec la colinéarité : $x y' - x' y = 0$. Le vecteur $(-b ; a)$ est orthogonal à $(a ; b)$.

Exercice 7 — Orthogonaux ou non ?

Compléter le tableau. Les vecteurs sont donnés dans un repère orthonormé.

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	orthogonaux ?
$(4 ; -6)$	$(3 ; 2)$		
$(5 ; 1)$	$(-1 ; 4)$		
$(-2 ; -3)$	$(9 ; -6)$		
$(7 ; 0)$	$(0 ; -3)$		

Correction de l'exercice 7

$(4 ; -6) \cdot (3 ; 2) = 12 - 12 = 0$: **oui**. $(5 ; 1) \cdot (-1 ; 4) = -5 + 4 = -1$: **non**.

$(-2 ; -3) \cdot (9 ; -6) = -18 + 18 = 0$: **oui**. $(7 ; 0) \cdot (0 ; -3) = 0 + 0 = 0$: **oui** (l'un est porté par l'axe des abscisses, l'autre par celui des ordonnées).

Point de vigilance : la deuxième ligne donne -1 , très proche de 0, mais pas nul : les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 8 — Un rectangle ?

On donne $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 4)$, $C(4 ; 6)$ et $D(0 ; 4)$ dans un repère orthonormé.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. Conclure sur la nature de $ABCD$.

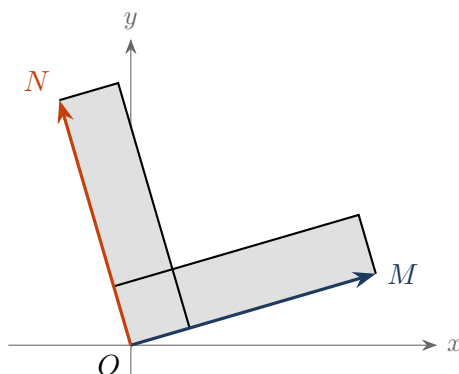
Correction de l'exercice 8

a. $\overrightarrow{AB} = (4 ; 2)$ et $\overrightarrow{DC} = (4 ; 2)$: ces vecteurs sont égaux, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.

b. $\overrightarrow{AD} = (-1 ; 2)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -4 + 4 = 0$. Un parallélogramme qui a un angle droit est un **rectangle**.

Exercice 9 — Un plan de travail en L

Vu de dessus, un plan de travail de cuisine en L est dessiné dans un repère orthonormé dont l'unité est le décimètre. Ses deux bords arrière partent du coin $O(0; 0)$ et vont jusqu'en $M(24; 7)$ et $N(-7; 24)$.



Vue de dessus. Le plan de travail est grisé ; ses bords arrière OM et ON , le long des murs, sont fléchés à partir du coin O . Profondeur du plan : 6 dm.

- Le coin O est-il d'équerre ? Justifier par un calcul.
- Calculer les longueurs OM et ON , en mètres.
- Sur une autre cuisine, les bords vont de O vers $M(24; 7)$ et $P(-6; 25)$. Le coin est-il d'équerre ?

Correction de l'exercice 9

- $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 24 \times (-7) + 7 \times 24 = -168 + 168 = 0$: le coin est **d'équerre**.
- $OM = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$ dm, soit **2,5 m** ; $ON = \sqrt{49 + 576} = 25$ dm, soit **2,5 m**.
- $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = -144 + 175 = 31 \neq 0$: ce coin **n'est pas** d'équerre (l'angle vaut environ $87,2^\circ$, trop peu pour se voir à l'œil, assez pour qu'un plan de travail ne se pose pas bien).

Exercice 10 — Trouver le réel qui rend orthogonal

- Déterminer k pour que $\vec{u}(k; 3)$ et $\vec{v}(6; -4)$ soient orthogonaux.
- Déterminer k pour que $\vec{w}(3; -1)$ et $\vec{z}(k; 9)$ soient orthogonaux.
- Donner deux vecteurs différents orthogonaux à $\vec{t}(5; -2)$.

Correction de l'exercice 10

- $6k + 3 \times (-4) = 0$, soit $6k = 12$ et **$k = 2$** .
- $3k + (-1) \times 9 = 0$, soit $3k = 9$ et **$k = 3$** .
- Par exemple $(2; 5)$: $5 \times 2 + (-2) \times 5 = 0$; et $(-4; -10)$, multiple du précédent. Toute réponse $(2a; 5a)$ avec $a \neq 0$ est juste.

Exercice 11 — Poser une cloison d'équerre

Sur le plan d'un local (repère orthonormé, unité : le mètre), un mur va de $A(2; 1)$ à $B(10; 4)$. Une cloison doit partir de B vers un point $C(7; k)$ et former un angle droit avec le mur.

- Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
- Déterminer k .
- Calculer la longueur de la cloison BC , au centimètre.

Correction de l'exercice 11

- a. $\overrightarrow{BA} = (-8; -3)$ et $\overrightarrow{BC} = (-3; k-4)$.
 b. $(-8) \times (-3) + (-3)(k-4) = 0$, soit $24 - 3k + 12 = 0$ et $k = 12$. Contrôle : $\overrightarrow{BC} = (-3; 8)$ et $24 - 24 = 0$.
 c. $BC = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73} \approx 8,54$ m.

Exercice 12 — Deux affirmations à vérifier

- a. Léa affirme : « $\vec{u}(6; 4)$ et $\vec{v}(3; 2)$ sont orthogonaux, car $6 \times 2 - 4 \times 3 = 0$. » A-t-elle raison ? Quel test a-t-elle utilisé ?
 b. Tom a tracé $\vec{a}(10; 1)$ et $\vec{b}(-1; 9)$ sur son cahier et affirme : « on voit bien qu'ils forment un angle droit. » Vérifier par le calcul.

Correction de l'exercice 12

- a. Non. Léa a utilisé le test de **colinéarité** $xy' - x'y = 0$: il prouve que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction ($\vec{u} = 2\vec{v}$). Le test d'orthogonalité donne $\vec{u} \cdot \vec{v} = 18 + 8 = 26 \neq 0$: ils ne sont **pas** orthogonaux.
 b. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10 + 9 = -1 \neq 0$: **pas d'angle droit**. L'angle vaut environ $90,6^\circ$: l'œil ne peut pas faire la différence, le calcul oui.

C2 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle pour calculer un produit scalaire ou déterminer un angle

Exigible. Prérequis : C1 ; cosinus d'un angle à la calculatrice.

Rappel de cours

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$, placés à partir d'un même point, forment l'angle θ :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \quad \text{donc} \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Produit positif : angle aigu ; nul : angle droit ; négatif : angle obtus. Travail d'une force : $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos \alpha$, en joules. Calculatrice en mode **degrés**.

Exercice 13 — Avec les normes et l'angle

Compléter le tableau, en arrondissant au centième si nécessaire.

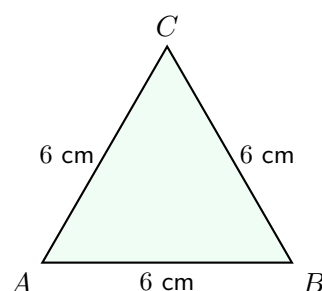
$\ \vec{u}\ $	$\ \vec{v}\ $	angle θ	$\vec{u} \cdot \vec{v}$
3	4	60°	
5	2	90°	
6	3	180°	
4	7	120°	
2	5	45°	

Correction de l'exercice 13

$3 \times 4 \times \cos 60^\circ = 12 \times 0,5 = 6$; $5 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$; $6 \times 3 \times \cos 180^\circ = 18 \times (-1) = -18$;
 $4 \times 7 \times \cos 120^\circ = 28 \times (-0,5) = -14$; $2 \times 5 \times \cos 45^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 7,07$.

Exercice 14 — Dans un triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm : ses trois angles mesurent 60° .



Triangle équilatéral ABC vu de face ; ses trois côtés mesurent 6 cm.

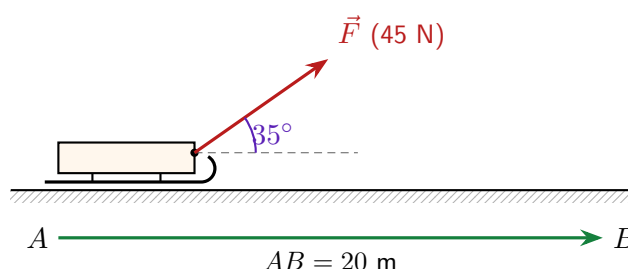
- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$. Attention : ces deux vecteurs ne partent pas du même point.

Correction de l'exercice 14

- $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ partent de A et forment l'angle 60° : $6 \times 6 \times \cos 60^\circ = \mathbf{18}$.
- On place $\vec{BC}$ à partir de A ; ou bien on écrit $\vec{AB} = -\vec{BA}$: $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -(6 \times 6 \times \cos 60^\circ) = \mathbf{-18}$. L'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ vaut 120° , pas 60° : $36 \times \cos 120^\circ = -18$.

Exercice 15 — Tirer une luge

Un parent tire une luge sur 20 m de neige plate avec une corde. La force exercée par la corde vaut 45 N et fait un angle de 35° avec le sol.



Vue de côté. La luge glisse de A à B sur un sol horizontal ; la force de la corde fait l'angle de 35° avec l'horizontale (tirets).

- Calculer le travail de la force de la corde, arrondi au joule.
- Le poids de la luge et de l'enfant vaut 120 N. Quel est son travail ?
- La neige exerce une force de frottement de 35 N, opposée au déplacement. Calculer son travail.

Correction de l'exercice 15

- $W = 45 \times 20 \times \cos 35^\circ \approx 900 \times 0,8192 \approx \mathbf{737 \text{ J}}$.
- Le poids est vertical, le déplacement horizontal : angle 90° , travail **nul**.
- Angle 180° : $W = 35 \times 20 \times (-1) = \mathbf{-700 \text{ J}}$. Le travail est négatif : le frottement freine la luge.

Exercice 16 — Un angle, étape par étape

On donne $\vec{u}(4; 3)$ et $\vec{v}(-2; 6)$.

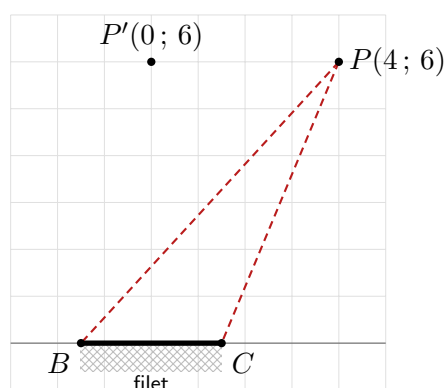
- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$. b. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
- En déduire $\cos \theta$, puis l'angle θ au dixième de degré.
- Le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ était-il cohérent avec la valeur trouvée ?

Correction de l'exercice 16

- a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8 + 18 = 10$. b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \approx 6,325$.
 c. $\cos \theta = \frac{10}{5\sqrt{40}} \approx 0,3162$, donc $\theta \approx 71,6^\circ$.
 d. Oui : le produit est positif et l'angle est aigu.

Exercice 17 — L'angle de tir au handball

Vu de dessus, les poteaux d'un but de handball sont en $B(-1,5; 0)$ et $C(1,5; 0)$, dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre : le but mesure 3 m de large.



Vue de dessus du terrain, une graduation vaut un mètre. Le but est le trait épais BC ; les tirets relient le tireur P aux deux poteaux.

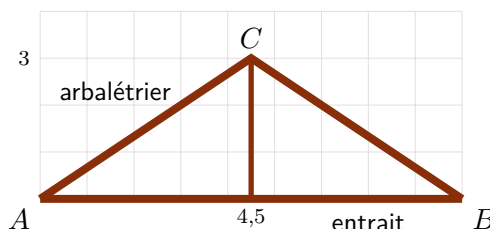
- a. Un joueur tire depuis $P(4; 6)$. Calculer l'angle $\widehat{BPC}$ sous lequel il voit le but, au dixième de degré.
 b. Même question depuis $P'(0; 6)$, face au but. Quelle position offre le plus grand angle de tir ?

Correction de l'exercice 17

- a. $\overrightarrow{PB} = (-5,5; -6)$ et $\overrightarrow{PC} = (-2,5; -6)$; $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 13,75 + 36 = 49,75$; $PB = \sqrt{66,25} \approx 8,139$ et $PC = \sqrt{42,25} = 6,5$. $\cos \widehat{BPC} \approx \frac{49,75}{8,139 \times 6,5} \approx 0,9403$, donc $\widehat{BPC} \approx 19,9^\circ$.
 b. $\overrightarrow{P'B} = (-1,5; -6)$ et $\overrightarrow{P'C} = (1,5; -6)$: produit $-2,25 + 36 = 33,75$; normes $\sqrt{38,25}$ toutes deux ; $\cos \widehat{BP'C} = \frac{33,75}{38,25} \approx 0,8824$, donc $\widehat{BP'C} \approx 28,1^\circ$. À la même distance de la ligne de but, la position face au but offre le plus grand angle.

Exercice 18 — Les angles d'une ferme de charpente

Une ferme de charpente symétrique est dessinée en coupe dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre : l'entrait va de $A(0; 0)$ à $B(9; 0)$ et le faîtage est en $C(4,5; 3)$.



Coupe verticale de la ferme, une graduation vaut un mètre. Entrait AB horizontal, arbalétriers AC et BC , poinçon vertical sous le faîtage C .

- a. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$, c'est-à-dire la pente du toit, au dixième de degré.
 b. Calculer l'angle au faîtage $\widehat{ACB}$ au dixième de degré.
 c. Contrôler vos deux résultats avec la somme des angles du triangle.

Correction de l'exercice 18

- a. $\vec{AB} = (9; 0)$, $\vec{AC} = (4,5; 3)$: produit 40,5 ; $AB = 9$, $AC = \sqrt{29,25} \approx 5,408$. $\cos \widehat{BAC} \approx \frac{40,5}{9 \times 5,408} \approx 0,8321$, donc $\widehat{BAC} \approx 33,7^\circ$.
- b. $\vec{CA} = (-4,5; -3)$, $\vec{CB} = (4,5; -3)$: produit $-20,25 + 9 = -11,25$; $\cos \widehat{ACB} = \frac{-11,25}{29,25} \approx -0,3846$, donc $\widehat{ACB} \approx 112,6^\circ$ (produit négatif : angle obtus).
- c. La ferme est symétrique : $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$. Et $33,7 + 33,7 + 112,6 = 180$: les résultats sont cohérents.

Exercice 19 — Où est l'erreur ?

On cherche l'angle entre $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(3; 1)$. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$.

Karim : $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} + \sqrt{10}} \approx 0,926$, donc $\theta \approx 22,1^\circ$.

Lina : $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} \approx 0,7071$; sa calculatrice affiche $\cos^{-1}(0,7071) \approx 0,785$, et elle écrit $\theta \approx 0,785^\circ$.

- a. Expliquer l'erreur de chacun. b. Donner la bonne valeur de θ .

Correction de l'exercice 19

a. Karim divise par la **somme** des normes au lieu de leur **produit**. Lina a le bon cosinus, mais sa calculatrice est en mode **radians** : 0,785 est l'angle en radians ($\frac{\pi}{4}$), pas en degrés.

b. En mode degrés : $\theta = \cos^{-1}(0,7071) = 45^\circ$.

C3 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes de la somme et les propriétés du produit scalaire pour déterminer une longueur

Exigible. Prérequis : C2.

Rappel de cours

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Propriétés : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Dans un triangle ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$. Pour une somme de forces : $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = F_1^2 + 2 \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + F_2^2$.

Exercice 20 — Un produit scalaire sans coordonnées

On sait que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$.

a. Compléter : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\dots - \dots - \dots) = \dots$

b. En déduire l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

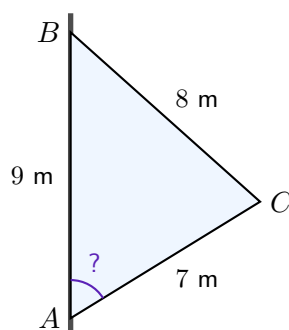
Correction de l'exercice 20

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(49 - 25 - 9) = \frac{1}{2} \times 15 = 7,5$.

b. $\cos \theta = \frac{7,5}{5 \times 3} = 0,5$, donc $\theta = 60^\circ$.

Exercice 21 — Une voile triangulaire

Les trois côtés d'une voile triangulaire mesurent $AB = 9$ m (le long du mât), $AC = 7$ m (le long de la bôme) et $BC = 8$ m.



Voile vue de côté : le côté AB longe le mât (trait épais), A est en bas. L'angle en A , entre le mât et le côté AC , est inconnu.

- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ à partir des seules longueurs.
- En déduire l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

Correction de l'exercice 21

- $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(81 + 49 - 64) = 33$.
- $\cos \widehat{BAC} = \frac{33}{9 \times 7} = \frac{33}{63} \approx 0,5238$, donc $\widehat{BAC} \approx 58,4^\circ$.

Exercice 22 — Calculer avec les propriétés

On sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -3$ et $\|\vec{u}\| = 2$. Calculer, en nommant la propriété utilisée :

- $\vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$
- $(3\vec{u}) \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w})$

Correction de l'exercice 22

- Commutativité : $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.
- Distributivité : $4 + (-3) = 1$.
- $(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = 3 \times 4 = 12$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 4 = 4 + 4 = 8$.
- $2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \vec{u} \cdot \vec{w} = 8 - (-3) = 11$.

Exercice 23 — Deux randonneurs

Deux randonneurs partent du même refuge R . L'un marche en ligne droite jusqu'au point A , à 6 km ; l'autre jusqu'au point B , à 10 km. Les deux directions font un angle de 40° .

- Compléter le calcul :

$$AB^2 = RA^2 + RB^2 - 2 \times RA \times RB \times \cos \widehat{ARB}$$

$$AB^2 = \dots + \dots - \dots \approx \dots$$

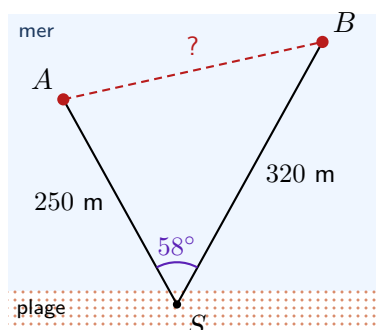
- En déduire la distance AB entre les deux randonneurs, au centième de km.

Correction de l'exercice 23

- $AB^2 = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 40^\circ \approx 136 - 91,93 \approx 44,07$.
- $AB \approx \sqrt{44,07} \approx 6,64$ km. Contrôle : l'angle est aigu et $44,07 < 136$.

Exercice 24 — *La distance entre deux bouées*

Depuis le poste de secours S d'une plage, un sauveteur mesure les distances jusqu'à deux bouées : $SA = 250$ m et $SB = 320$ m. L'angle ASB mesure 58° .



Vue de dessus. Le poste S est sur la plage, les bouées A et B en mer ; la distance AB (tirets) est cherchée.

Calculer la distance AB entre les deux bouées, au mètre près. Contrôler la cohérence du résultat.

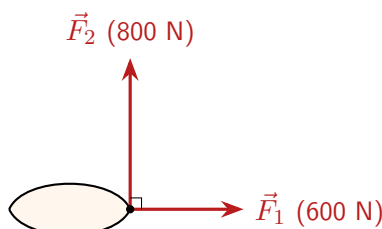
Correction de l'exercice 24

$AB^2 = 250^2 + 320^2 - 2 \times 250 \times 320 \times \cos 58^\circ \approx 164\,900 - 84\,787 = 80\,113$, donc $AB \approx \mathbf{283}$ m.

Contrôle : l'angle est aigu, donc $AB^2 < SA^2 + SB^2$; et AB est bien compris entre $320 - 250 = 70$ m et $320 + 250 = 570$ m.

Exercice 25 — *Tirer une barque vers la rive*

Deux personnes tirent une barque à l'aide de deux cordes attachées au même anneau. Les forces exercées valent $F_1 = 600$ N et $F_2 = 800$ N.



Vue de dessus de la barque dans le premier cas : les deux cordes partent de l'anneau à l'avant et font un angle droit. Longueur des flèches proportionnelle aux forces.

- Les deux cordes font un angle droit. Calculer la valeur de la force totale $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
- Même question si les cordes font un angle de 60° .
- Dans quel cas la barque est-elle tirée le plus fort ? Pourquoi ?

Correction de l'exercice 25

a. $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 600^2 + 800^2 + 2 \times 600 \times 800 \times \cos 90^\circ = 1\,000\,000$, donc la force totale vaut **1 000** N (on retrouve Pythagore).

b. $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 360\,000 + 640\,000 + 960\,000 \times 0,5 = 1\,480\,000$, donc $\approx \mathbf{1\,217}$ N.

c. À 60° : plus les cordes sont proches l'une de l'autre, plus le terme $2 \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ est grand, et plus la somme se rapproche de $600 + 800 = 1\,400$ N.

Exercice 26 — *Contrôler un résultat*

Dans un triangle ABC , $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Deux élèves calculent BC .

Sami : $BC^2 = 5^2 + 8^2 = 89$, donc $BC \approx 9,43$ cm.

Zoé : $BC^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ = 129$, donc $BC \approx 11,36$ cm.

a. Sans refaire le calcul, expliquer pourquoi aucun des deux résultats ne peut être juste. **b.** Calculer BC .

Correction de l'exercice 26

a. L'angle en A est **aigu**, donc BC^2 doit être **plus petit** que $AB^2 + AC^2 = 89$. Sami a appliqué Pythagore à un triangle qui n'est pas rectangle ; Zoé a mis un $+$ au lieu du $-$.

b. $BC^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times 0,5 = 89 - 40 = 49$, donc $BC = 7$ cm.