

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 11

Produit scalaire

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Module du programme complémentaire, préparation à une poursuite d'études : il n'est pas évalué à l'épreuve du baccalauréat.

Rappel de cours — Avant de commencer

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sa norme dans un repère orthonormé (vecteurs du plan, Première), utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque, et lire le cosinus d'un angle à la calculatrice. La calculatrice est autorisée, réglée en **degrés**.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées dans un repère orthonormé	§1 Le produit scalaire par les coordonnées	2 él. 2
C4 – Reconnaître des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormé	§2 Vecteurs orthogonaux	3 él. 3
C2 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle pour calculer un produit scalaire ou déterminer un angle	§3 Normes et angle ; travail d'une force	4 él. 4
C2 – (suite)	§4 Déterminer un angle	6 él. 7
C3 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes de la somme et les propriétés du produit scalaire pour déterminer une longueur	§5 Normes et propriétés	7 él. 8
C3 – (suite)	§6 Déterminer une longueur	8 él. 9
C1 à C4 – Choisir l'expression adaptée aux données	§7 Choisir son outil	9 él. 10

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

C1, C2 et C3 détaillent la capacité du programme « Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles » ; C4 est la seconde capacité du programme. Dans tout le chapitre, les vecteurs sont ceux du **plan**, et le repère est **orthonormé**.

1 Le produit scalaire par les coordonnées (C1)

Définition — Produit scalaire de deux vecteurs

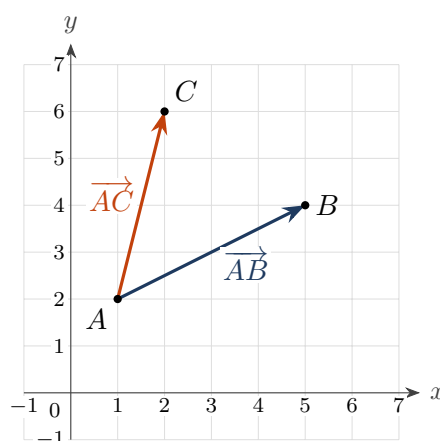
Dans un repère **orthonormé**, on considère $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

On multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, puis on additionne.

Le résultat est un **nombre réel**, positif, négatif ou nul : ce n'est pas un vecteur. Avec un vecteur et lui-même, on retrouve le carré de sa norme :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2.$$



Repère orthonormé vu de face, une graduation vaut une unité sur chaque axe. Les points $A(1; 2)$, $B(5; 4)$ et $C(2; 6)$ sont fixes ; les deux flèches partent du même point A.

Exemple — Deux vecteurs issus du même point

$$\vec{AB} = (5 - 1; 4 - 2) = (4; 2) \text{ et } \vec{AC} = (2 - 1; 6 - 2) = (1; 4).$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + 2 \times 4 = 4 + 8 = \mathbf{12}.$$

$$\text{Avec } \vec{u}(3; -2) \text{ et } \vec{v}(4; 5) : \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = \mathbf{2}.$$

$$\text{Et } \vec{AB} \cdot \vec{AB} = 4^2 + 2^2 = 20 : \text{c'est } AB^2, \text{ donc } AB = \sqrt{20} \approx 4,47.$$

Erreur fréquente — Croiser les coordonnées

On ne multiplie pas l'abscisse de l'un par l'ordonnée de l'autre : $x y' + y x'$ n'est pas le produit scalaire. Les parenthèses autour d'un nombre négatif évitent les erreurs de signe : $(-2) \times 5 = -10$.

Application 1 – Calculer des produits scalaires

- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(5; -1)$ et $\vec{v}(2; 3)$.
- On donne $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$ et $C(4; -2)$. Calculer $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, puis $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$ et en déduire la longueur AB.

Correction — Application 1

$$\mathbf{a.} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 2 + (-1) \times 3 = 10 - 3 = \mathbf{7}.$$

$$\mathbf{b.} \quad \vec{AB} = (3 - (-1); 5 - 2) = (4; 3) \text{ et } \vec{AC} = (4 - (-1); -2 - 2) = (5; -4). \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 5 + 3 \times (-4) = 20 - 12 = \mathbf{8}.$$

$$\mathbf{c.} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AB} = 4^2 + 3^2 = 25 = AB^2, \text{ donc } AB = \mathbf{5}.$$

Conduite : faire écrire « arrivée moins départ » pour chaque vecteur avant tout produit ; l'erreur la plus fréquente au b. est $-2 - 2 = 0$.

2 Reconnaître des vecteurs orthogonaux (C4)

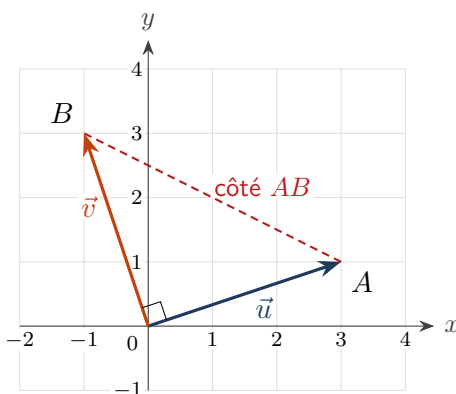
Définition — Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque leurs directions sont **perpendiculaires** : placés à partir d'un même point, ils forment un angle droit. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Proposition — Le test par les coordonnées

Dans un repère orthonormé,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff x x' + y y' = 0.$$



Repère orthonormé vu de face, une graduation vaut une unité. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}(3; 1)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}(-1; 3)$ partent de l'origine O ; le côté AB du triangle est en tirets. Le petit carré marque l'angle droit en O .

Démonstration

Plaçons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Alors $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u} = (x' - x; y' - y)$ et, en développant les carrés,

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{OA^2} + \underbrace{x'^2 + y'^2}_{OB^2} - 2(x x' + y y').$$

Par le théorème de Pythagore et sa réciproque, l'angle en O est droit si, et seulement si, $AB^2 = OA^2 + OB^2$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x x' + y y' = 0$. $\square$

Sur la figure : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$, et en effet $OA^2 + OB^2 = 10 + 10 = 20 = AB^2$.

Méthode — Prouver un angle droit

1. Écrire les deux vecteurs à partir du sommet de l'angle étudié. **2.** Calculer $x x' + y y'$. **3.** Conclure : si le résultat vaut 0, l'angle est droit ; sinon, il ne l'est pas — une valeur « proche de 0 » ne suffit pas.

Exemple — Un angle de pièce sur un plan

Sur un plan d'aménagement (unité : le mètre), trois coins d'une pièce sont $A(0; 0)$, $B(6; 2)$ et $C(5; 5)$. L'angle en B est-il droit ?

$\overrightarrow{BA} = (-6; -2)$ et $\overrightarrow{BC} = (-1; 3)$, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6) \times (-1) + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux : **l'angle en B est droit.**

Un vecteur orthogonal à un vecteur donné : à $\vec{u}(a; b)$, le vecteur $(-b; a)$ est orthogonal, car $a \times (-b) + b \times a = 0$. Ainsi $(-3; 7)$ est orthogonal à $(7; 3)$.

Erreur fréquente — Orthogonaux ou colinéaires ?

Le test de **colinéarité** vu en Première est $xy' - x'y = 0$: il dit si deux vecteurs ont la même direction. Le test d'**orthogonalité** est $xx' + yy' = 0$. Exemple : $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(4; 6)$ donnent $2 \times 6 - 4 \times 3 = 0$: colinéaires ; mais $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 18 = 26 \neq 0$: pas orthogonaux.

Application 2 – Tester des angles droits

- $\vec{u}(6; -4)$ et $\vec{v}(2; 3)$ sont-ils orthogonaux ? Même question pour $\vec{u}(5; 2)$ et $\vec{w}(-3; 7)$.
- On donne $A(1; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(0; k)$. Déterminer k pour que l'angle en A du triangle ABC soit droit.
- Donner un vecteur orthogonal à $\vec{t}(7; -2)$ et vérifier.

Correction — Application 2

- $6 \times 2 + (-4) \times 3 = 12 - 12 = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**. $5 \times (-3) + 2 \times 7 = -15 + 14 = -1 \neq 0$: $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne le sont **pas** (l'angle est très proche de 90° , mais pas droit).
- $\vec{AB} = (3; 2)$ et $\vec{AC} = (-1; k - 1)$. $3 \times (-1) + 2(k - 1) = 0$ donne $2k - 5 = 0$, soit $k = 2,5$.
- Par exemple $(2; 7)$: $7 \times 2 + (-2) \times 7 = 14 - 14 = 0$. Tout multiple non nul, comme $(-4; -14)$, convient aussi.

3 Le produit scalaire avec les normes et l'angle (C2)

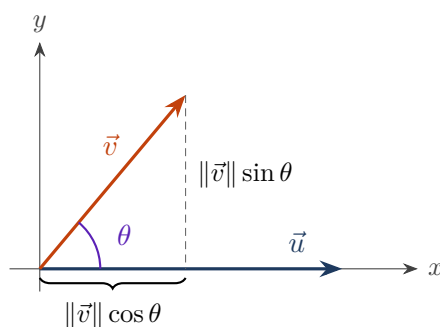
Proposition — Expression avec le cosinus

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et forment l'angle θ , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta.$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

L'angle θ se mesure entre les deux vecteurs **placés à partir d'un même point**, de 0° à 180° . Qu'on tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ dans un sens ou dans l'autre, le cosinus est le même : le résultat ne dépend pas du sens de rotation.



Cas particulier vu de face : $\vec{u}$ est porté par l'axe des abscisses. Le vecteur $\vec{v}$ fait l'angle θ avec lui ; ses coordonnées sont $\|\vec{v}\| \cos \theta$ (accolade) et $\|\vec{v}\| \sin \theta$ (tirets verticaux).

Remarque — Pourquoi cette expression est vraie ici

Sur la figure, $\vec{u}(\|\vec{u}\|; 0)$ et $\vec{v}(\|\vec{v}\| \cos \theta; \|\vec{v}\| \sin \theta)$, comme sur le cercle trigonométrique. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta + 0 \times \|\vec{v}\| \sin \theta = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$. Le cas général est admis.

À retenir

Le signe du produit scalaire renseigne sur l'angle :

— θ aigu ($\cos \theta > 0$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;

— $\theta = 90^\circ$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

— θ obtus ($\cos \theta < 0$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Deux cas extrêmes : même sens ($\theta = 0^\circ$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$; sens contraires ($\theta = 180^\circ$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple — Dans un triangle

Dans un triangle ABC , $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ partent de A et forment l'angle 60° :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 8 \times \cos 60^\circ = 40 \times 0,5 = \mathbf{20}.$$

Erreur fréquente — Des vecteurs qui ne partent pas du même point

$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne partent pas du même point : l'angle entre eux n'est pas $\widehat{BAC}$. Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -20$.

Application 3 – Avec les normes et l'angle

- $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 120° . Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Un triangle ABC est rectangle en A , avec $AB = 7$ et $AC = 3$. Que vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?
- $\|\vec{u}\| = 10$, $\|\vec{v}\| = 2$ et l'angle vaut 35° . Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, arrondi au centième.

Correction — Application 3

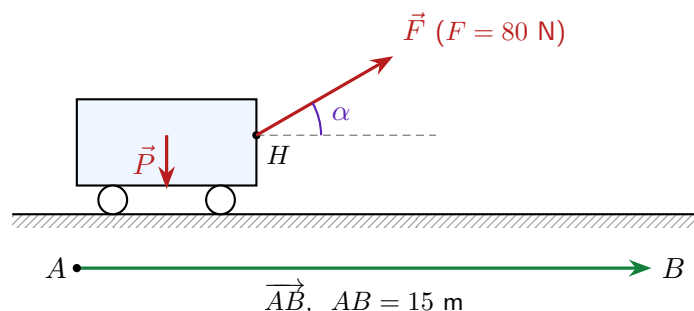
- $4 \times 6 \times \cos 120^\circ = 24 \times (-0,5) = -12$: l'angle est obtus, le produit est négatif.
- L'angle en A vaut 90° et $\cos 90^\circ = 0$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Les longueurs ne servent pas.
- $10 \times 2 \times \cos 35^\circ \approx 20 \times 0,8192 \approx \mathbf{16,38}$.

Une application en mécanique : le travail d'une force**Définition — Travail d'une force constante**

Quand le point d'application d'une force constante $\vec{F}$ se déplace en ligne droite de A à B , le **travail** de cette force est

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos \alpha$$

où α est l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$. Avec F en newtons (N) et AB en mètres (m), le travail s'exprime en joules (J).



Vue de côté d'un chariot tiré sur un sol horizontal. La force de traction $\vec{F}$ est appliquée en H et fait l'angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale (tirets) ; le poids $\vec{P}$ est vertical ; le déplacement $\overrightarrow{AB}$ est horizontal.

Exemple — Tirer un chariot

Un agent tire un chariot sur $AB = 15$ m avec une force constante de 80 N inclinée de 30° sur l'horizontale :

$$W_{AB}(\vec{F}) = 80 \times 15 \times \cos 30^\circ \approx \mathbf{1\,039\text{ J}}.$$

Le poids $\vec{P}$, vertical, est perpendiculaire au déplacement horizontal : $\cos 90^\circ = 0$, donc $W_{AB}(\vec{P}) = 0$ J. Une force de frottement de 60 N, opposée au déplacement ($\alpha = 180^\circ$), a un travail $60 \times 15 \times (-1) = -900$ J : elle s'oppose au mouvement.

Application 4 – Le chariot de ménage

Un agent d'entretien tire un chariot sur 25 m, en ligne droite sur un sol horizontal, avec une force constante de 40 N dont la direction fait 50° avec le sol.

- Calculer le travail de cette force, arrondi au joule.
- Quel serait ce travail si la même force de 40 N était horizontale ?
- Que vaut le travail du poids du chariot sur ce trajet ? Justifier.

Correction — Application 4

- $W = 40 \times 25 \times \cos 50^\circ \approx 1\,000 \times 0,6428 \approx \mathbf{643\text{ J}}$.
- $\alpha = 0^\circ$: $W = 40 \times 25 \times 1 = \mathbf{1\,000\text{ J}}$. À valeur de force égale, c'est quand la force est dans le sens du déplacement que le travail est le plus grand.
- Le poids est vertical, le déplacement horizontal : l'angle vaut 90° , donc le travail du poids est **nul**.

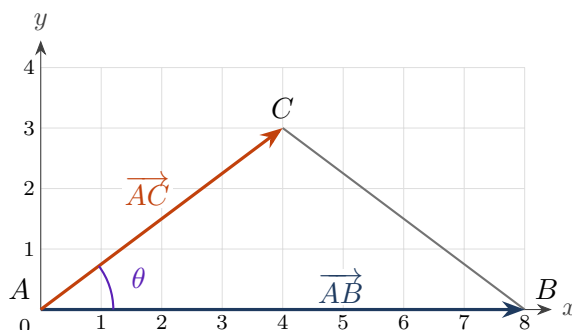
4 Déterminer un angle (C2)

En égalant les deux expressions du produit scalaire, on obtient le cosinus de l'angle :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Méthode — Calculer l'angle entre deux vecteurs

- Calculer le produit scalaire avec les coordonnées.
- Calculer les deux normes.
- Diviser le produit scalaire par le **produit** des normes : c'est $\cos \theta$, un nombre entre -1 et 1 .
- Obtenir θ avec la touche $\cos^{-1}$ (ou Arccos) de la calculatrice, en mode **degrés**.
- Contrôler le signe : produit scalaire positif, angle aigu ; négatif, angle obtus.



Coupe d'une ferme de toit dessinée dans un repère orthonormé, une graduation vaut un mètre. L'entrait va de A à B, l'arbalétrier de A au faîtière C ; θ est l'angle en A, c'est-à-dire la pente du toit.

Exemple — La pente d'un toit

$\vec{AB} = (8; 0)$ et $\vec{AC} = (4; 3)$. 1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 \times 4 + 0 \times 3 = 32$. 2. $AB = 8$ et $AC = \sqrt{16 + 9} = 5$.

3. $\cos \theta = \frac{32}{8 \times 5} = 0,8$. 4. $\theta = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,9^\circ$. 5. Produit positif, angle aigu : cohérent.

Un cas obtus : $\vec{u}(2; 1)$ et $\vec{v}(-3; 2)$ donnent $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 2 = -4$, $\cos \theta = \frac{-4}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} \approx -0,4961$, donc $\theta \approx 119,7^\circ$.

Erreur fréquente — Trois pièges de la dernière étape

Diviser par la **somme** des normes au lieu de leur produit ; laisser la calculatrice en mode radians ou grades (on lit alors 0,644 ou 40,97 au lieu de 36,9) ; arrondir le cosinus trop tôt. Garder la valeur exacte du cosinus en mémoire et n'arrondir que l'angle.

Application 5 – Mesurer des angles par le calcul

- a. Calculer l'angle entre $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(5; -12)$, au dixième de degré. L'angle est-il aigu ou obtus ?
b. On donne $A(1; 1)$, $B(7; 3)$ et $C(3; 6)$. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

Correction — Application 5

- a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 48 = -33$; $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{25 + 144} = 13$. $\cos \theta = \frac{-33}{65} \approx -0,5077$, donc $\theta \approx 120,5^\circ$: angle **obtus**, comme l'annonçait le signe négatif.
b. $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 5)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$; $AB = \sqrt{40}$, $AC = \sqrt{29}$. $\cos \widehat{BAC} = \frac{22}{\sqrt{40} \times \sqrt{29}} \approx 0,6459$, d'où $\widehat{BAC} \approx 49,8^\circ$.

5 Le produit scalaire avec les normes ; propriétés (C3)

Proposition — Expression avec les normes

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad \text{et aussi} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Elle donne le produit scalaire à partir de **longueurs seules**, sans coordonnées ni angle.

Démonstration

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2(x x' + y y')$, soit $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. On isole $\vec{u} \cdot \vec{v}$. La seconde forme vient du calcul du §2. $\square$

Proposition — Propriétés de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel α :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

On en déduit deux égalités utiles : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Exemple — À partir des longueurs d'un triangle

Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, la seconde forme donne

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (36 + 16 - 25) = 13,5.$$

Avec les propriétés : si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = -5$, alors $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 3 + (-5) = -2$ et $(4\vec{u}) \cdot \vec{v} = 4 \times 3 = 12$.

Application 6 – Sans coordonnées

- $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 8$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Un triangle ABC a pour côtés $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 6$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- On sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$. Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{v} \cdot (3\vec{u})$.
- Vérifier la première forme avec $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(3; -1)$.

Correction — Application 6

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(64 - 16 - 36) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(49 + 25 - 36) = \frac{1}{2} \times 38 = 19$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 2 + (-1) = 1$; $\vec{v} \cdot (3\vec{u}) = 3(\vec{v} \cdot \vec{u}) = 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 6$.
- $\vec{u} + \vec{v} = (4; 1)$: $\frac{1}{2}(17 - 5 - 10) = 1$; directement, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$. Les deux calculs concordent.

6 Déterminer une longueur (C3)

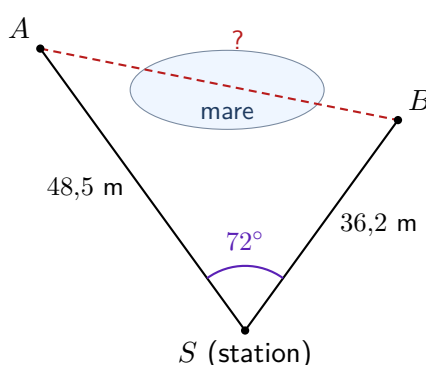
Pour trouver une longueur, on l'écrit comme la norme d'une somme ou d'une différence de vecteurs connus, puis on développe son carré. Dans un triangle ABC , $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, et avec l'expression du §3 :

Proposition — Formule d'Al-Kashi

Dans tout triangle ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.
Si l'angle en A est droit, $\cos \widehat{BAC} = 0$: on retrouve Pythagore.

Méthode — Calculer une longueur

- Repérer le triangle et l'angle connu entre les deux côtés connus.
- Écrire la formule, remplacer, calculer BC^2 .
- Prendre la racine carrée et donner l'unité.
- Contrôler : si l'angle est aigu, BC^2 est plus petit que $AB^2 + AC^2$; s'il est obtus, il est plus grand.



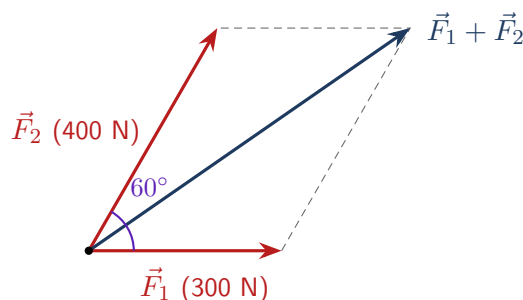
Vue de dessus. Depuis la station S , on mesure les distances horizontales SA et SB et l'angle $\widehat{ASB}$; la distance AB (tirets) traverse la mare et ne peut pas se mesurer directement.

Exemple — Une distance qu'on ne peut pas parcourir

Dans le triangle SAB : $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2 \times SA \times SB \times \cos 72^\circ$

$$AB^2 = 48,5^2 + 36,2^2 - 2 \times 48,5 \times 36,2 \times \cos 72^\circ \approx 3662,69 - 1085,08 \approx 2577,6$$

donc $AB \approx \sqrt{2577,6} \approx 50,8$ m. Contrôle : l'angle est aigu et $2577,6 < 3662,69$.



Deux forces appliquées au même point, vues dans leur plan ; la longueur de chaque flèche est proportionnelle à la valeur de la force. La somme est la diagonale du parallélogramme (côtés en tirets).

Exemple — La valeur de la somme de deux forces

$$\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \|\vec{F}_2\|^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 400 \times \cos 60^\circ + 400^2 = 370\,000, \text{ donc } \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| \approx \mathbf{608\,N} \text{ — et non } 300 + 400 = 700\,N.$$

Application 7 – Des longueurs par le calcul

- Dans un triangle ABC , $AB = 8\,\text{m}$, $AC = 5\,\text{m}$ et $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Calculer BC au centimètre.
- Deux forces de $250\,\text{N}$ chacune, appliquées au même point, font entre elles un angle de 120° . Calculer la valeur de leur somme.

Correction — Application 7

- $BC^2 = 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 50^\circ \approx 89 - 51,42 = 37,58$, donc $BC \approx \mathbf{6,13\,m}$. Contrôle : angle aigu et $37,58 < 89$.
- $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 250^2 + 2 \times 250 \times 250 \times \cos 120^\circ + 250^2 = 62\,500 + (-62\,500) + 62\,500 = 62\,500$, donc la somme vaut $\mathbf{250\,N}$. Les forces « s'ouvrent » tellement que leur somme n'est pas plus grande que chacune d'elles.

7 Choisir l'expression adaptée (C1 à C4)

Cette partie n'introduit pas de notion nouvelle : elle apprend à choisir, parmi les trois expressions, celle que les données permettent d'utiliser.

Méthode — Quelle expression pour quelles données ?

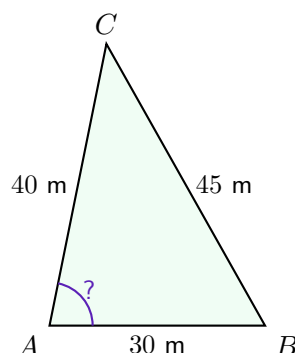
On connaît...

- les coordonnées des vecteurs
- deux longueurs et l'angle entre elles
- les trois longueurs d'un triangle

On utilise...

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= x x' + y y' \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \end{aligned}$$

Puis : un **angle** cherché s'obtient par $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$; une **longueur** cherchée, en développant le carré d'une somme ou d'une différence.



Vue de dessus d'un terrain triangulaire, les trois côtés mesurés au décimètre ; l'angle en A est inconnu.

Exemple — Un terrain dont on connaît les trois côtés

Seules les longueurs sont connues : on choisit l'expression avec les normes. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(30^2 + 40^2 - 45^2) = \frac{1}{2}(900 + 1600 - 2025) = 237,5$. Puis $\cos \widehat{BAC} = \frac{237,5}{30 \times 40} \approx 0,1979$, donc $\widehat{BAC} \approx 78,6^\circ$.

Application 8 – Une terrasse triangulaire

Sur un plan (unité : le mètre), une terrasse a pour sommets $A(0; 0)$, $B(8; 0)$ et $C(6; 4)$.

- L'angle en C est-il droit ?
- Calculer cet angle au dixième de degré.
- Un collègue ne connaît que CA, CB et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$. Retrouver la longueur AB à partir de ces seules données, et contrôler avec le plan.

Correction — Application 8

- $\vec{CA} = (-6; -4)$ et $\vec{CB} = (2; -4)$: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -12 + 16 = 4 \neq 0$. L'angle en C **n'est pas droit**.
- $CA = \sqrt{52}$, $CB = \sqrt{20}$; $\cos \widehat{ACB} = \frac{4}{\sqrt{52} \times \sqrt{20}} \approx 0,1240$, donc $\widehat{ACB} \approx 82,9^\circ$: proche de l'angle droit, sans l'être.
- $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$, donc $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 52 + 20 - 8 = 64$ et $AB = 8$ m. Le plan donne bien $AB = 8$: de $A(0; 0)$ à $B(8; 0)$.

Bilan – Je sais faire

À retenir

Trois expressions d'un même nombre, dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

— **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff x x' + y y' = 0$.

— **Angle** : $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, puis $\theta = \cos^{-1}(\dots)$ en degrés.

— **Longueur** : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Méthode — Je sais faire

- ☐ Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées (§1).
- ☐ Prouver qu'un angle est droit, ou qu'il ne l'est pas (§2).
- ☐ Calculer un produit scalaire à partir de deux longueurs et d'un angle, et un travail (§3).
- ☐ Calculer un angle au dixième de degré (§4).

- ☐ Calculer un produit scalaire à partir de longueurs seules (§5).
- ☐ Calculer une longueur inaccessible ou la valeur d'une somme de forces (§6).

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Mes deux vecteurs partent-ils du *même point* ? 2. Le signe du produit scalaire est-il cohérent avec l'angle (aigu, droit, obtus) ? 3. Mon cosinus est-il bien compris entre -1 et 1 ? Sinon, une norme ou un produit est faux. 4. La calculatrice est-elle en *degrés* ? 5. Ai-je donné l'unité d'une longueur, d'une force ou d'un travail ?

Remarque — Aller plus loin – dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, pour $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, on pose de même $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$, et les propriétés de ce chapitre restent vraies. Le programme de ce module se limite au plan.