Version élève

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 11

Produit scalaire

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Module du programme complémentaire, préparation à une poursuite d'études : il n'est pas évalué à l'épreuve du baccalauréat.

Nom : ..... Classe : .....

Rappel de cours — Avant de commencer

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sa norme dans un repère orthonormé (vecteurs du plan, Première), utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque, et lire le cosinus d'un angle à la calculatrice. La calculatrice est autorisée, réglée en **degrés**.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées dans un repère orthonormé	§1 Le produit scalaire par les coordonnées	2
C4 – Reconnaître des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormé	§2 Vecteurs orthogonaux	3
C2 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle pour calculer un produit scalaire ou déterminer un angle	§3 Normes et angle ; travail d'une force	4
C2 – (suite)	§4 Déterminer un angle	7
C3 – Utiliser l'expression du produit scalaire avec les normes de la somme et les propriétés du produit scalaire pour déterminer une longueur	§5 Normes et propriétés	8
C3 – (suite)	§6 Déterminer une longueur	9
C1 à C4 – Choisir l'expression adaptée aux données	§7 Choisir son outil	10

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les exemples restent résolus ; les corrigés des applications sont dans la version professeur.

C1, C2 et C3 détaillent la capacité du programme « Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles » ; C4 est la seconde capacité du programme. Dans tout le chapitre, les vecteurs sont ceux du **plan**, et le repère est **orthonormé**.

1 Le produit scalaire par les coordonnées (C1)

Définition — Produit scalaire de deux vecteurs

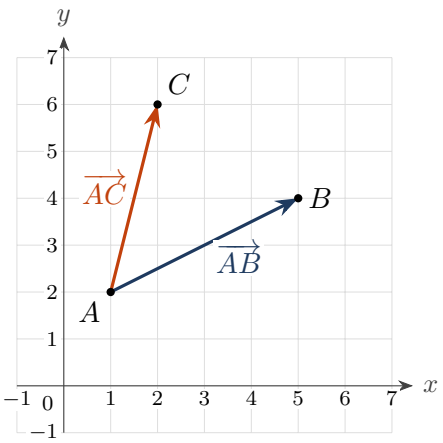
Dans un repère **orthonormé**, on considère $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y'$$

On multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, puis on additionne.

Le résultat est un **nombre réel**, positif, négatif ou nul : ce n'est pas un vecteur. Avec un vecteur et lui-même, on retrouve le carré de sa norme :

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2.$$



Repère orthonormé vu de face, une graduation vaut une unité sur chaque axe. Les points $A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,4)$ et $C(2\,;\,6)$ sont fixes ; les deux flèches partent du même point A.

Exemple — Deux vecteurs issus du même point

$\overrightarrow{AB} = (5-1\,;\,4-2) = (4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC} = (2-1\,;\,6-2) = (1\,;\,4)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + 2\times 4 = 4 + 8 = \mathbf{12}.$$

Avec $\vec{u}\,(3\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,5)$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 4 + (-2)\times 5 = 12 - 10 = \mathbf{2}$.
Et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 4^2 + 2^2 = 20$: c'est AB^2, donc $AB = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.

Erreur fréquente — Croiser les coordonnées

On ne multiplie pas l'abscisse de l'un par l'ordonnée de l'autre : $x\,y' + y\,x'$ n'est pas le produit scalaire. Les parenthèses autour d'un nombre négatif évitent les erreurs de signe : $(-2)\times 5 = -10$.

Application 1 – Calculer des produits scalaires

a. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}\,(5\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,3)$.
b. On donne $A(-1\,;\,2)$, $B(3\,;\,5)$ et $C(4\,;\,-2)$. Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
c. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire la longueur AB.

2 Reconnaître des vecteurs orthogonaux (C4)

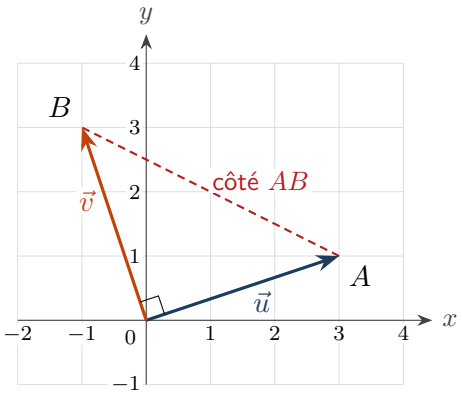
Définition — Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque leurs directions sont **perpendiculaires** : placés à partir d'un même point, ils forment un angle droit. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Proposition — Le test par les coordonnées

Dans un repère orthonormé,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x\,x' + y\,y' = 0.$$



Repère orthonormé vu de face, une graduation vaut une unité. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}\,(3\,;\,1)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}\,(-1\,;\,3)$ partent de l'origine O ; le côté AB du triangle est en tirets. Le petit carré marque l'angle droit en O.

Démonstration

Plaçons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Alors $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u} = (x' - x\,;\,y' - y)$ et, en développant les carrés,

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{OA^2} + \underbrace{x'^2 + y'^2}_{OB^2} - 2\,(x\,x' + y\,y').$$

Par le théorème de Pythagore et sa réciproque, l'angle en O est droit si, et seulement si, $AB^2 = OA^2 + OB^2$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x\,x' + y\,y' = 0$. □

Sur la figure : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$, et en effet $OA^2 + OB^2 = 10 + 10 = 20 = AB^2$.

Méthode — Prouver un angle droit

1. Écrire les deux vecteurs **à partir du sommet** de l'angle étudié. **2.** Calculer $x\,x' + y\,y'$. **3.** Conclure : si le résultat vaut 0, l'angle est droit ; sinon, il ne l'est pas — une valeur « proche de 0 » ne suffit pas.

Exemple — Un angle de pièce sur un plan

Sur un plan d'aménagement (unité : le mètre), trois coins d'une pièce sont $A(0\,;\,0)$, $B(6\,;\,2)$ et $C(5\,;\,5)$. L'angle en B est-il droit ?
$\overrightarrow{BA} = (-6\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{BC} = (-1\,;\,3)$, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6) \times (-1) + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux : **l'angle en B est droit**.

Un vecteur orthogonal à un vecteur donné : à $\vec{u}\,(a\,;\,b)$, le vecteur $(-b\,;\,a)$ est orthogonal, car $a \times (-b) + b \times a = 0$. Ainsi $(-3\,;\,7)$ est orthogonal à $(7\,;\,3)$.

Erreur fréquente — Orthogonaux ou colinéaires ?

Le test de **colinéarité** vu en Première est $x\,y' - x'\,y = 0$: il dit si deux vecteurs ont la même direction. Le test d'**orthogonalité** est $x\,x' + y\,y' = 0$. Exemple : $\vec{u}\,(2\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,6)$ donnent $2 \times 6 - 4 \times 3 = 0$: colinéaires ; mais $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 18 = 26 \neq 0$: pas orthogonaux.

Application 2 – Tester des angles droits

a. $\vec{u}\,(6\,;\,-4)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,3)$ sont-ils orthogonaux ? Même question pour $\vec{u}\,(5\,;\,2)$ et $\vec{w}\,(-3\,;\,7)$.
b. On donne $A(1\,;\,1)$, $B(4\,;\,3)$ et $C(0\,;\,k)$. Déterminer k pour que l'angle en A du triangle ABC soit droit.
c. Donner un vecteur orthogonal à $\vec{t}\,(7\,;\,-2)$ et vérifier.

3 Le produit scalaire avec les normes et l'angle (C2)

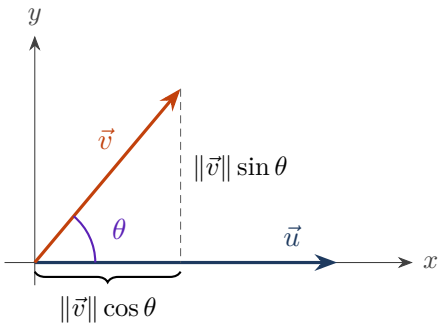
Proposition — Expression avec le cosinus

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et forment l'angle θ, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta.$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

L'angle θ se mesure entre les deux vecteurs **placés à partir d'un même point**, de $0°$ à $180°$. Qu'on tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ dans un sens ou dans l'autre, le cosinus est le même : le résultat ne dépend pas du sens de rotation.



Cas particulier vu de face : $\vec{u}$ est porté par l'axe des abscisses. Le vecteur $\vec{v}$ fait l'angle θ avec lui ; ses coordonnées sont $\|\vec{v}\| \cos\theta$ (accolade) et $\|\vec{v}\| \sin\theta$ (tirets verticaux).

Remarque — Pourquoi cette expression est vraie ici

Sur la figure, $\vec{u}\,(\|\vec{u}\|\,;\,0)$ et $\vec{v}\,(\|\vec{v}\| \cos\theta\,;\,\|\vec{v}\| \sin\theta)$, comme sur le cercle trigonométrique. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\theta + 0 \times \|\vec{v}\| \sin\theta = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$. Le cas général est admis.

À retenir

Le signe du produit scalaire renseigne sur l'angle :

— θ aigu $(\cos\theta > 0)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;

— $\theta = 90°$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

— θ obtus $(\cos\theta < 0)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Deux cas extrêmes : même sens $(\theta = 0°)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$; sens contraires $(\theta = 180°)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple — Dans un triangle

Dans un triangle ABC, $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 60°$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ partent de A et forment l'angle $60°$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 8 \times \cos 60° = 40 \times 0{,}5 = \mathbf{20}.$$

Erreur fréquente — Des vecteurs qui ne partent pas du même point

$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne partent pas du même point : l'angle entre eux n'est pas $\widehat{BAC}$. Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -20$.

Application 3 – Avec les normes et l'angle

a. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $120°$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b. Un triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 7$ et $AC = 3$. Que vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

c. $\|\vec{u}\| = 10$, $\|\vec{v}\| = 2$ et l'angle vaut $35°$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, arrondi au centième.

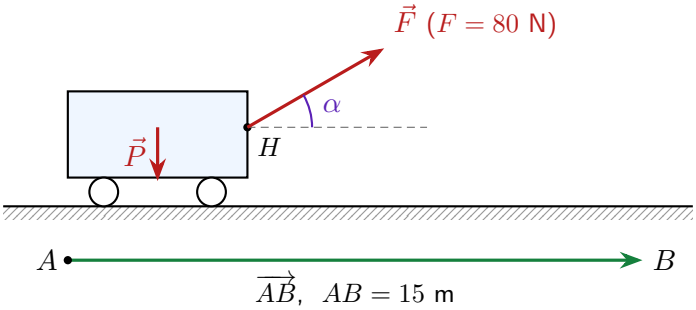
Une application en mécanique : le travail d'une force

Définition — Travail d'une force constante

Quand le point d'application d'une force constante $\vec{F}$ se déplace en ligne droite de A à B, le **travail** de cette force est

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos\alpha$$

où α est l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$. Avec F en newtons (N) et AB en mètres (m), le travail s'exprime en joules (J).



Vue de côté d'un chariot tiré sur un sol horizontal. La force de traction $\vec{F}$ est appliquée en H et fait l'angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale (tirets) ; le poids $\vec{P}$ est vertical ; le déplacement $\overrightarrow{AB}$ est horizontal.

Exemple — Tirer un chariot

Un agent tire un chariot sur $AB = 15$ m avec une force constante de 80 N inclinée de $30°$ sur l'horizontale :

$$W_{AB}(\vec{F}) = 80 \times 15 \times \cos 30° \approx \mathbf{1\,039} \text{ J.}$$

Le poids $\vec{P}$, vertical, est perpendiculaire au déplacement horizontal : $\cos 90° = 0$, donc $W_{AB}(\vec{P}) = 0$ J. Une force de frottement de 60 N, opposée au déplacement ($\alpha = 180°$), a un travail $60 \times 15 \times (-1) = -900$ J : elle s'oppose au mouvement.

Application 4 – Le chariot de ménage

Un agent d'entretien tire un chariot sur 25 m, en ligne droite sur un sol horizontal, avec une force constante de 40 N dont la direction fait $50°$ avec le sol.

a. Calculer le travail de cette force, arrondi au joule.

b. Quel serait ce travail si la même force de 40 N était horizontale ?

c. Que vaut le travail du poids du chariot sur ce trajet ? Justifier.

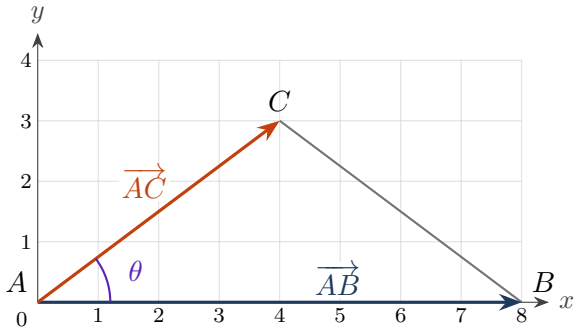
4 Déterminer un angle (C2)

En égalant les deux expressions du produit scalaire, on obtient le cosinus de l'angle :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{x\,x' + y\,y'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Méthode — Calculer l'angle entre deux vecteurs

1. Calculer le produit scalaire avec les coordonnées. **2.** Calculer les deux normes. **3.** Diviser le produit scalaire par le **produit** des normes : c'est $\cos\theta$, un nombre entre -1 et 1. **4.** Obtenir θ avec la touche $\cos^{-1}$ (ou Arccos) de la calculatrice, en mode **degrés**. **5.** Contrôler le signe : produit scalaire positif, angle aigu ; négatif, angle obtus.



Coupe d'une ferme de toit dessinée dans un repère orthonormé, une graduation vaut un mètre. L'entrait va de A à B, l'arbalétrier de A au faîtage C ; θ est l'angle en A, c'est-à-dire la pente du toit.

Exemple — La pente d'un toit

$\overrightarrow{AB} = (8\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AC} = (4\,;\,3)$. **1.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8\times 4 + 0\times 3 = 32$. **2.** $AB = 8$ et $AC = \sqrt{16+9} = 5$. **3.** $\cos\theta = \dfrac{32}{8\times 5} = 0{,}8$. **4.** $\theta = \cos^{-1}(0{,}8) \approx \mathbf{36{,}9}°$. **5.** Produit positif, angle aigu : cohérent.

Un cas obtus : $\vec{u}\,(2\,;\,1)$ et $\vec{v}\,(-3\,;\,2)$ donnent $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6+2 = -4$, $\cos\theta = \dfrac{-4}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}} \approx -0{,}4961$, donc $\theta \approx 119{,}7°$.

Erreur fréquente — Trois pièges de la dernière étape

Diviser par la **somme** des normes au lieu de leur produit ; laisser la calculatrice en mode radians ou grades (on lit alors $0{,}644$ ou $40{,}97$ au lieu de $36{,}9$) ; arrondir le cosinus trop tôt. Garder la valeur exacte du cosinus en mémoire et n'arrondir que l'angle.

Application 5 – Mesurer des angles par le calcul

a. Calculer l'angle entre $\vec{u}\,(3\,;\,4)$ et $\vec{v}\,(5\,;\,-12)$, au dixième de degré. L'angle est-il aigu ou obtus ?
b. On donne $A(1\,;\,1)$, $B(7\,;\,3)$ et $C(3\,;\,6)$. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

5 Le produit scalaire avec les normes ; propriétés (C3)

Proposition — Expression avec les normes

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\Big) \qquad \text{et aussi} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big).$$

Elle donne le produit scalaire à partir de **longueurs seules**, sans coordonnées ni angle.

Démonstration

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\,;\,y+y')$, donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2 = x^2+y^2+x'^2+y'^2+2(x\,x'+y\,y')$, soit $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$. On isole $\vec{u}\cdot\vec{v}$. La seconde forme vient du calcul du §2. □

Proposition — Propriétés de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel α :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \alpha\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\,\vec{u})\cdot\vec{v} \qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

On en déduit deux égalités utiles : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

Exemple — À partir des longueurs d'un triangle

Dans un triangle ABC, $AB=6$, $AC=4$ et $BC=5$. Comme $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, la seconde forme donne

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2) = \frac{1}{2}(36+16-25) = \mathbf{13{,}5}.$$

Avec les propriétés : si $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}=-5$, alors $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = 3+(-5) = -2$ et $(4\,\vec{u})\cdot\vec{v} = 4\times 3 = 12$.

Application 6 – Sans coordonnées

a. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 8$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
b. Un triangle ABC a pour côtés $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
c. On sait que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = -1$. Calculer $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ et $\vec{v}\cdot(3\,\vec{u})$.
d. Vérifier la première forme avec $\vec{u}\,(1\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,-1)$.

6 Déterminer une longueur (C3)

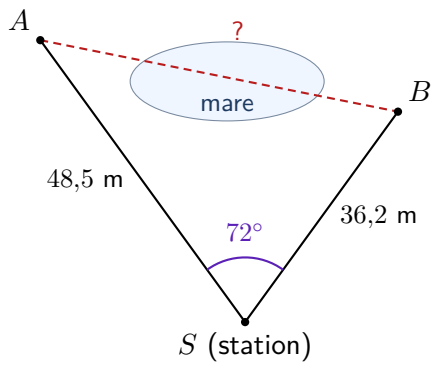
Pour trouver une longueur, on l'écrit comme la norme d'une somme ou d'une différence de vecteurs connus, puis on développe son carré. Dans un triangle ABC, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, et avec l'expression du §3 :

Proposition — Formule d'Al-Kashi

Dans tout triangle ABC : $\quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.
Si l'angle en A est droit, $\cos\widehat{BAC} = 0$: on retrouve Pythagore.

Méthode — Calculer une longueur

1. Repérer le triangle et l'angle connu entre les deux côtés connus. **2.** Écrire la formule, remplacer, calculer BC^2. **3.** Prendre la racine carrée et donner l'unité. **4.** Contrôler : si l'angle est aigu, BC^2 est plus petit que $AB^2 + AC^2$; s'il est obtus, il est plus grand.



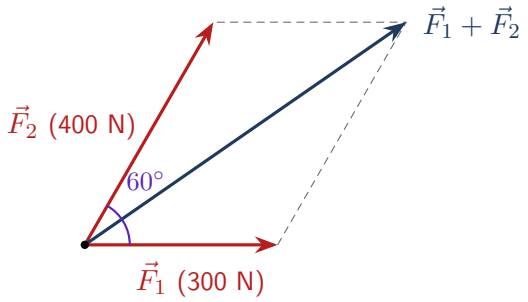
Vue de dessus. Depuis la station S, on mesure les distances horizontales SA et SB et l'angle $\widehat{ASB}$; la distance AB (tirets) traverse la mare et ne peut pas se mesurer directement.

Exemple — Une distance qu'on ne peut pas parcourir

Dans le triangle SAB : $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2 \times SA \times SB \times \cos 72°$

$$AB^2 = 48{,}5^2 + 36{,}2^2 - 2 \times 48{,}5 \times 36{,}2 \times \cos 72° \approx 3\,662{,}69 - 1\,085{,}08 \approx 2\,577{,}6$$

donc $AB \approx \sqrt{2\,577{,}6} \approx \mathbf{50{,}8}$ m. Contrôle : l'angle est aigu et $2\,577{,}6 < 3\,662{,}69$.



Deux forces appliquées au même point, vues dans leur plan ; la longueur de chaque flèche est proportionnelle à la valeur de la force. La somme est la diagonale du parallélogramme (côtés en tirets).

Exemple — La valeur de la somme de deux forces

$\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + 2\,\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \|\vec{F}_2\|^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 400 \times \cos 60° + 400^2 = 370\,000$, donc $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| \approx \mathbf{608}$ N — et non $300 + 400 = 700$ N.

Application 7 – Des longueurs par le calcul

a. Dans un triangle ABC, $AB = 8$ m, $AC = 5$ m et $\widehat{BAC} = 50°$. Calculer BC au centimètre.
b. Deux forces de 250 N chacune, appliquées au même point, font entre elles un angle de $120°$. Calculer la valeur de leur somme.

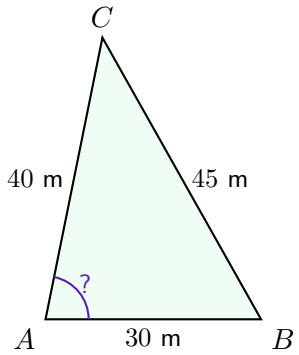
7 Choisir l'expression adaptée (C1 à C4)

Cette partie n'introduit pas de notion nouvelle : elle apprend à choisir, parmi les trois expressions, celle que les données permettent d'utiliser.

Méthode — Quelle expression pour quelles données ?

On connaît...	On utilise...
les coordonnées des vecteurs	$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y'$
deux longueurs et l'angle entre elles	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert \times \cos\theta$
les trois longueurs d'un triangle	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2)$

Puis : un **angle** cherché s'obtient par $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert}$; une **longueur** cherchée, en développant le carré d'une somme ou d'une différence.



Vue de dessus d'un terrain triangulaire, les trois côtés mesurés au décamètre ; l'angle en A est inconnu.

Exemple — Un terrain dont on connaît les trois côtés

Seules les longueurs sont connues : on choisit l'expression avec les normes. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(30^2+40^2-45^2) = \frac{1}{2}(900+1\,600-2\,025) = 237{,}5$. Puis $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{237{,}5}{30\times 40} \approx 0{,}1979$, donc $\widehat{BAC} \approx \mathbf{78{,}6}°$.

Application 8 – Une terrasse triangulaire

Sur un plan (unité : le mètre), une terrasse a pour sommets $A(0\,;\,0)$, $B(8\,;\,0)$ et $C(6\,;\,4)$.
a. L'angle en C est-il droit ?
b. Calculer cet angle au dixième de degré.
c. Un collègue ne connaît que CA, CB et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. Retrouver la longueur AB à partir de ces seules données, et contrôler avec le plan.

Bilan – Je sais faire

À retenir

Trois expressions d'un même nombre, dans un repère orthonormé :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y' \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

— **Orthogonalité :** $\vec{u} \perp \vec{v} \iff x\,x' + y\,y' = 0$.

— **Angle :** $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, puis $\theta = \cos^{-1}(\dots)$ en degrés.

— **Longueur :** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Méthode — Je sais faire

- ☐ Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées (§1).
- ☐ Prouver qu'un angle est droit, ou qu'il ne l'est pas (§2).
- ☐ Calculer un produit scalaire à partir de deux longueurs et d'un angle, et un travail (§3).
- ☐ Calculer un angle au dixième de degré (§4).
- ☐ Calculer un produit scalaire à partir de longueurs seules (§5).
- ☐ Calculer une longueur inaccessible ou la valeur d'une somme de forces (§6).

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Mes deux vecteurs partent-ils du *même point* ? **2.** Le signe du produit scalaire est-il cohérent avec l'angle (aigu, droit, obtus) ? **3.** Mon cosinus est-il bien compris entre -1 et 1 ? Sinon, une norme ou un produit est faux. **4.** La calculatrice est-elle en *degrés* ? **5.** Ai-je donné l'unité d'une longueur, d'une force ou d'un travail ?

Remarque — Aller plus loin – dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, pour $\vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y'\,;\,z')$, on pose de même $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$, et les propriétés de ce chapitre restent vraies. Le programme de ce module se limite au plan.