

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cours et applications****Chapitre 10****Nombres complexes**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Ce chapitre fait partie du programme complémentaire de préparation à une poursuite d'études : il n'est pas évalué au baccalauréat. Il faut savoir développer $(a + b)(c + d)$, utiliser le théorème de Pythagore, lire les coordonnées d'un point et d'un vecteur, et retrouver un angle connaissant son cosinus (touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice).

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Écrire un nombre complexe sous forme algébrique, identifier sa partie réelle et sa partie imaginaire, et utiliser l'égalité de deux nombres complexes	§1 – Forme algébrique	2 él. 2
C2 – Représenter un nombre complexe dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct : placer le point d'affixe donnée, lire l'affixe d'un point, calculer l'affixe d'un vecteur	§2 – Plan complexe	3 él. 3
C3 – Calculer la somme et le produit de deux nombres complexes sous forme algébrique	§3 – Somme et produit	5 él. 5
C4 – Calculer le conjugué d'un nombre complexe, l'interpréter géométriquement et utiliser le conjugué d'une somme et d'un produit	§4 – Conjugué	7 él. 7
C5 – Calculer le module d'un nombre complexe, l'interpréter géométriquement et utiliser le module d'un produit	§5 – Module	9 él. 8
C6 – Calculer le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique, et utiliser le conjugué et le module d'un quotient	§6 – Quotient	10 él. 10
C7 – Déterminer un argument d'un nombre complexe non nul, l'interpréter géométriquement, et passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement	§7 – Argument, forme trigonométrique	11 él. 11
C1, C5, C6 et C7 réinvestis – l'impédance d'un dipôle, avec la notation j des électriciens	§8 – Électricité	13 él. 13

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version. Le §8 est un contexte d'usage : les relations d'électricité y sont données.

1 Un nombre dont le carré vaut -1 (C1)

Un carré de nombre réel n'est jamais négatif : aucun réel x ne vérifie $x^2 = -1$. Depuis le XVI^e siècle, les mathématiciens ont pris le parti d'*inventer* un nombre qui vérifie cette égalité, puis de calculer avec lui comme avec les autres. Ce nombre a reçu le nom i en 1777, dans un mémoire de Leonhard Euler.

Définition — Nombre complexe, forme algébrique

On admet l'existence d'un nombre, noté i , tel que

$$i^2 = -1.$$

Un **nombre complexe** est un nombre qui s'écrit $z = a + ib$, où a et b sont deux nombres **réels**. Cette écriture est la **forme algébrique** de z ; elle est unique.

— a est la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$;

— b est la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$. C'est un nombre réel : le i n'en fait pas partie.

Si $b = 0$, $z = a$ est un nombre **réel**. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $z = ib$ est un **imaginaire pur**. L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Théorème — Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont **la même partie réelle** et **la même partie imaginaire** :

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

Exemple — Lire, puis mettre sous forme algébrique

1. $z = -4 + 7i$: $\text{Re}(z) = -4$ et $\text{Im}(z) = 7$.

2. $z = 3i - 5$ n'est pas rangé dans l'ordre : $z = -5 + 3i$, donc $\text{Re}(z) = -5$ et $\text{Im}(z) = 3$.

3. $z = 2i^2 + 3i$: on remplace i^2 par -1 , d'où $z = 2 \times (-1) + 3i = -2 + 3i$.

Exemple — Utiliser l'égalité

On cherche les réels x et y tels que $(2x - 1) + (y + 3)i = 5 - i$.

On égale les parties réelles : $2x - 1 = 5$, donc $x = 3$. On égale les parties imaginaires : $y + 3 = -1$, donc $y = -4$.

Erreur fréquente — La partie imaginaire ne contient pas i

Pour $z = 3 - 5i$, on écrit $\text{Im}(z) = -5$, et non $-5i$ ni 5 : la partie imaginaire est le nombre réel qui multiplie i , avec son signe.

Application 1 – Lire les deux parties

On donne $z_1 = 6 - 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 7$ et $z_4 = i^2 + 4i$.

- Écrire z_4 sous forme algébrique.
- Donner la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des quatre nombres.
- Lequel est un réel ? Lequel est un imaginaire pur ?

Correction — Application 1

- $z_4 = i^2 + 4i = -1 + 4i$.
- $\operatorname{Re}(z_1) = 6$, $\operatorname{Im}(z_1) = -2$; $\operatorname{Re}(z_2) = 0$, $\operatorname{Im}(z_2) = -3$; $\operatorname{Re}(z_3) = 7$, $\operatorname{Im}(z_3) = 0$; $\operatorname{Re}(z_4) = -1$, $\operatorname{Im}(z_4) = 4$.
- $z_3 = 7$ est réel ; $z_2 = -3i$ est imaginaire pur.

Conduite : faire justifier chaque signe. Refuser « $\operatorname{Im}(z_1) = -2i$ » : c'est l'erreur visée par l'encadré rouge.

Application 2 – Deux inconnues réelles

- Déterminer les réels x et y tels que $(x + 2) + 3yi = -1 + 6i$.
- On considère $z = (a - 4) + (a + 1)i$, où a est un réel. Pour quelle valeur de a le nombre z est-il réel ? imaginaire pur ? Donner alors z .

Correction — Application 2

- Parties réelles : $x + 2 = -1$, donc $x = -3$. Parties imaginaires : $3y = 6$, donc $y = 2$.
- z est réel si sa partie imaginaire est nulle : $a + 1 = 0$, soit $a = -1$, et alors $z = -5$. z est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle (et sa partie imaginaire non nulle) : $a - 4 = 0$, soit $a = 4$, et alors $z = 5i$.

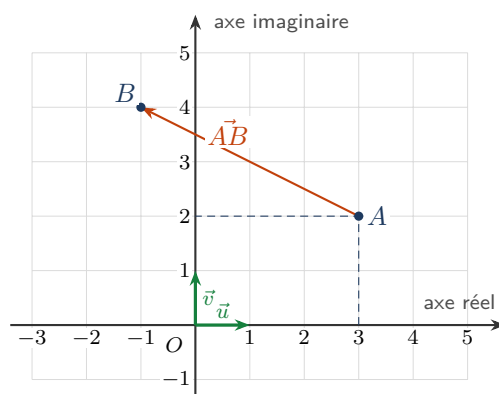
Conduite : la question b. fait le lien avec la définition. Faire vérifier que pour $a = 4$ la partie imaginaire vaut bien $5 \neq 0$.

2 Le plan complexe (C2)**Définition — Point image, affixe**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$: on passe de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ par un quart de tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

- Au nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point $M(a; b)$: M est le **point image** de z , et z est l'**affixe** du point M .
- Au vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$, on associe de même l'affixe $a + ib$.

La partie réelle se lit sur l'**axe réel** (axe des abscisses), la partie imaginaire sur l'**axe imaginaire** (axe des ordonnées).



Plan complexe, repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Le point A a pour affixe $z_A = 3 + 2i$: on lit 3 sur l'axe réel et 2 sur l'axe imaginaire (pointillés). Le point B a pour affixe $z_B = -1 + 4i$. La flèche orange est le vecteur $\vec{AB}$.

Théorème — Affixe d'un vecteur

Si A et B ont pour affixes z_A et z_B , le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A.$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales.

Exemple — Affixe du vecteur $\vec{AB}$ de la figure

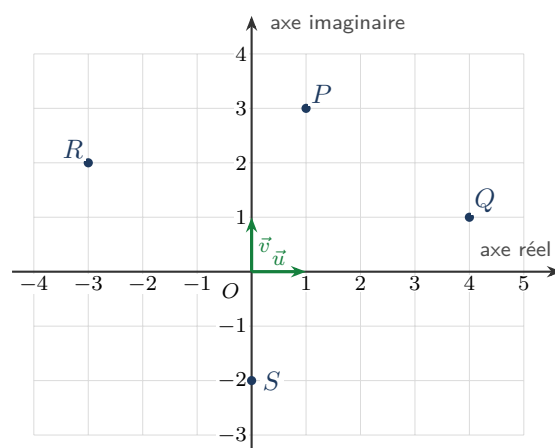
$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = (-1 + 4i) - (3 + 2i) = (-1 - 3) + (4 - 2)i = -4 + 2i.$$

Pour aller de A à B, on recule de 4 unités et on monte de 2 unités : c'est bien ce que montre la flèche.

Erreur fréquente — L'ordre des coordonnées

Le point d'affixe $-2 + 5i$ est $M(-2; 5)$: la partie réelle d'abord, en abscisse. Et l'affixe de $\vec{AB}$ est $z_B - z_A$: l'extrémité *moins* l'origine.

Application 3 – Lire et placer

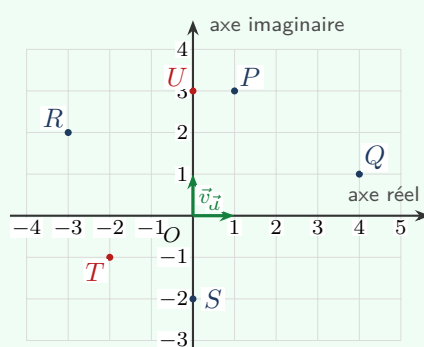


Plan complexe quadrillé, une unité par carreau. Quatre points P , Q , R et S sont placés.

- Lire les affixes des points P , Q , R et S .
- Placer sur la figure le point T d'affixe $-2 - i$ et le point U d'affixe $3i$.
- Calculer l'affixe du vecteur $\vec{PQ}$, puis celle du vecteur $\vec{RS}$.

Correction — Application 3

- $z_P = 1 + 3i$, $z_Q = 4 + i$, $z_R = -3 + 2i$, $z_S = -2i$.
- $T(-2; -1)$ et $U(0; 3)$:



- $z_{\vec{PQ}} = (4 + i) - (1 + 3i) = 3 - 2i$; $z_{\vec{RS}} = (-2i) - (-3 + 2i) = 3 - 4i$.

Conduite : S et U sont sur l'axe imaginaire : bien faire écrire $z_S = 0 - 2i = -2i$. Contrôler le vecteur sur la figure : de P à Q , 3 vers la droite et 2 vers le bas.

3 Somme et produit (C3)

Théorème — Calculer une somme, un produit

On calcule avec i comme avec une lettre, puis on remplace i^2 par -1 .

— **Somme** : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$. On additionne les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles ; de même pour la différence.

— **Produit** : $(a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

La formule du produit ne s'apprend pas : on développe.

Méthode — Calculer un produit en trois gestes

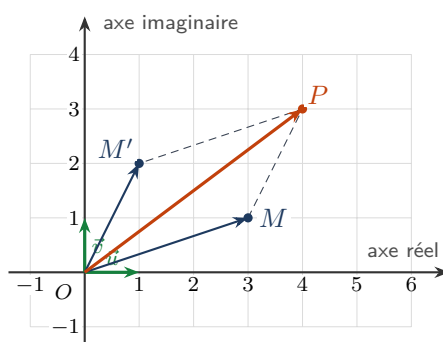
1. Développer : quatre produits. 2. Remplacer i^2 par -1 . 3. Regrouper la partie réelle et la partie imaginaire.

Exemple — Un produit, un carré

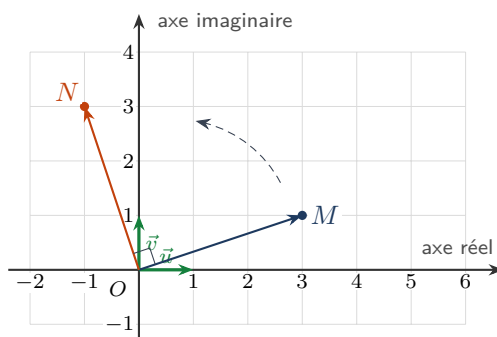
$$(3 - 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i - 2i - 8i^2 = 3 + 10i + 8 = 11 + 10i.$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i : \text{le carré d'un complexe peut être un imaginaire pur.}$$

Ce que montre la figure. Le programme propose d'observer l'image de la somme et celle du produit avec un logiciel de géométrie dynamique (ou la simulation « Nombres complexes » du site). Voici ce qu'on y voit.



Somme : M a pour affixe $z = 3 + i$, M' a pour affixe $z' = 1 + 2i$. Le point P d'affixe $z + z' = 4 + 3i$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OMPM'$: $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{OM'}$.



Produit par i : M a pour affixe $z = 3 + i$ et N a pour affixe $iz = 3i + i^2 = -1 + 3i$. On passe de M à N par un quart de tour autour de O, dans le sens direct ; $OM = ON$.

Application 4 – Somme, différence, produit

On donne $z_1 = 2 + 5i$ et $z_2 = 4 - 3i$. Calculer $z_1 + z_2$, puis $z_1 - z_2$, puis $z_1 \times z_2$. Donner chaque résultat sous forme algébrique.

Correction — Application 4

$$z_1 + z_2 = (2 + 4) + (5 - 3)i = 6 + 2i.$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 4) + (5 - (-3))i = -2 + 8i.$$

$$z_1 z_2 = (2 + 5i)(4 - 3i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 8 + 14i + 15 = 23 + 14i.$$

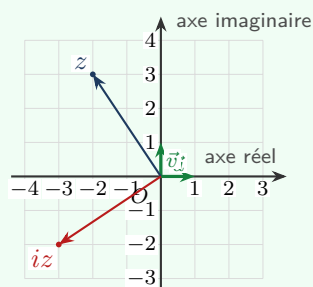
Conduite : dans la différence, la parenthèse change le signe de $-3i$; c'est là que se font la plupart des erreurs.

Application 5 – Un carré, un quart de tour

- Calculer $(3 - i)^2$.
- On donne $z = -2 + 3i$. Calculer iz .
- Placer sur un quadrillage les points d'affixes z et iz . Comment passe-t-on de l'un à l'autre ?

Correction — Application 5

- $(3 - i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.
- $iz = i(-2 + 3i) = -2i + 3i^2 = -3 - 2i$.
- Les points sont $(-2; 3)$ et $(-3; -2)$: on passe du premier au second par un quart de tour autour de O , dans le sens direct, comme sur la figure du cours.

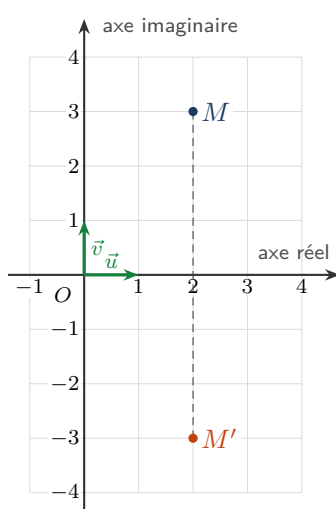


Conduite : la question c. est une observation. La rotation n'est pas une capacité exigible du chapitre ; elle prépare l'argument du §7.

4 Le conjugué (C4)**Définition — Conjugué**

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$: on garde la partie réelle et on change le signe de la partie imaginaire.

Dans le plan, les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont **symétriques par rapport à l'axe réel**.



M a pour affixe $z = 2 + 3i$ et M' a pour affixe $\bar{z} = 2 - 3i$. Le segment $[MM']$, en pointillés, est coupé en son milieu par l'axe réel, qui lui est perpendiculaire.

Théorème — Propriétés du conjugué

Pour tout $z = a + ib$:

$$z + \bar{z} = 2a \quad (\text{réel}), \quad z \bar{z} = a^2 + b^2 \quad (\text{réel positif}).$$

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \text{et} \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'}.$$

z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

Exemple — Calculer avec le conjugué

Pour $z = 4 - 5i$: $\bar{z} = 4 + 5i$, $z + \bar{z} = 8$, $z \bar{z} = (4 - 5i)(4 + 5i) = 16 + 20i - 20i - 25i^2 = 16 + 25 = 41$.
Vérification de $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'}$ avec $z = 1 + 2i$ et $z' = 3 - i$: $z z' = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$, donc $\overline{z z'} = 5 - 5i$; et $\bar{z} \bar{z'} = (1 - 2i)(3 + i) = 3 + i - 6i - 2i^2 = 5 - 5i$. Les deux calculs concordent.

Erreur fréquente — Conjugué n'est pas opposé

Le conjugué de $-3 + 2i$ est $-3 - 2i$. L'opposé de $-3 + 2i$ est $3 - 2i$: c'est un autre nombre, image du symétrique par rapport à O .

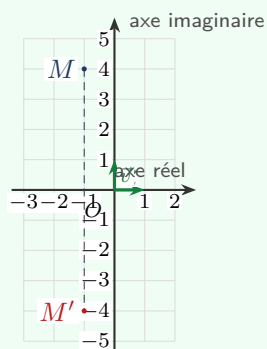
Application 6 – Conjugué et symétrie

On donne $z = -1 + 4i$.

- Donner $\bar{z}$, puis calculer $z + \bar{z}$ et $z \bar{z}$.
- Placer sur un quadrillage les points M et M' d'affixes z et $\bar{z}$. Que remarque-t-on ?

Correction — Application 6

- $\bar{z} = -1 - 4i$; $z + \bar{z} = -2$; $z \bar{z} = (-1)^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$.
- $M(-1 ; 4)$ et $M'(-1 ; -4)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Conduite : faire constater que $z + \bar{z}$ et $z \bar{z}$ sont réels, comme l'annonce l'encadré.

Application 7 – Deux propriétés vérifiées

On donne $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 1 - 3i$.

- Calculer $\overline{z_1 + z_2}$, puis $\overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- Calculer $\overline{z_1 z_2}$, puis $\overline{z_1} \overline{z_2}$.

Correction — Application 7

- $z_1 + z_2 = 3 - 2i$, donc $\overline{z_1 + z_2} = 3 + 2i$; $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (2 - i) + (1 + 3i) = 3 + 2i$. Même résultat.
- $z_1 z_2 = (2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i$, donc $\overline{z_1 z_2} = 5 + 5i$; $\overline{z_1} \overline{z_2} = (2 - i)(1 + 3i) = 2 + 6i - i - 3i^2 = 5 + 5i$. Même résultat.

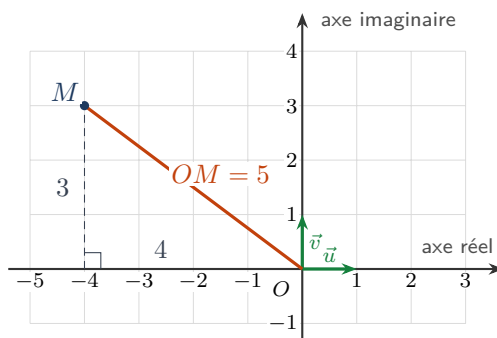
Conduite : une vérification sur un exemple ne démontre pas la propriété ; elle est admise.

5 Le module (C5)**Définition — Module**

Le **module** de $z = a + ib$ est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si M est le point d'affixe z , alors $|z| = OM$: c'est la **distance** de O à M , donnée par le théorème de Pythagore.



M a pour affixe $z = -4 + 3i$. Le triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 4 (le long de l'axe réel) et 3 (verticalement). Son hypoténuse OM vaut $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$: c'est le module de z .

Théorème — Propriétés du module

- Si $z = a$ est réel, $|z|$ est la valeur absolue de a : $|-7| = 7$.
- $z \overline{z} = |z|^2$ et $|\overline{z}| = |z|$.
- **Distance** : si A et B ont pour affixes z_A et z_B , alors $AB = |z_B - z_A|$, module de l'affixe du vecteur $\vec{AB}$.
- **Module d'un produit** : $|z z'| = |z| \times |z'|$.

Exemple — Trois calculs de module

- $|-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$; $|2 - 5i| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,39$; $|6i| = 6$.
- Distance : A d'affixe $1 + 2i$, B d'affixe $4 - 2i$. $z_B - z_A = 3 - 4i$, donc $AB = \sqrt{9 + 16} = 5$.
- Produit, sans développer : $|(1 + i)(3 - 4i)| = |1 + i| \times |3 - 4i| = \sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2} \approx 7,07$. Contrôle : $(1 + i)(3 - 4i) = 7 - i$ et $|7 - i| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Erreur fréquente — Pas de i sous la racine

$|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. On n'écrit ni $\sqrt{4-9}$ (le i ne se met pas au carré dans le module), ni $2 + 3 = 5$. Un module n'est jamais négatif.

Application 8 – Quatre modules

Calculer le module de $8 - 6i$, de $-5i$, de $-1 + i$ et de $12 + 5i$.

Correction — Application 8

$$|8 - 6i| = \sqrt{64 + 36} = 10 ; \quad |-5i| = 5 ; \quad |-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1,41 ; \quad |12 + 5i| = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Application 9 – La nature d'un triangle

Les points A , B et C ont pour affixes $z_A = -2 + i$, $z_B = 2 + 4i$ et $z_C = 5$.

- Calculer les longueurs AB , BC et AC .
- Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Correction — Application 9

- $z_B - z_A = 4 + 3i$, donc $AB = \sqrt{16 + 9} = 5$. $z_C - z_B = 3 - 4i$, donc $BC = \sqrt{9 + 16} = 5$.
 $z_C - z_A = 7 - i$, donc $AC = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} \approx 7,07$.
- $AB = BC$: le triangle est isocèle en B . De plus $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50 = AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en B . ABC est **rectangle isocèle en B** .
Conduite : faire dessiner le triangle pour contrôler le résultat à l'œil.

6 Le quotient (C6)**Méthode — Écrire un quotient sous forme algébrique**

Pour écrire $\frac{z}{z'}$ sous la forme $a + ib$ (avec $z' \neq 0$), on multiplie le numérateur **et** le dénominateur par le **conjugué du dénominateur**. Le dénominateur devient le réel $z' \overline{z'} = c^2 + d^2$ si $z' = c + id$; il ne reste plus qu'à diviser la partie réelle et la partie imaginaire par ce réel.

Exemple — Deux quotients

$$1. \frac{5 + 5i}{2 + i} = \frac{(5 + 5i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{10 - 5i + 10i - 5i^2}{4 + 1} = \frac{15 + 5i}{5} = 3 + i.$$

$$2. \frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i}{25} = 0,12 - 0,16i.$$

Contrôle du 1 : $(3 + i)(2 + i) = 6 + 3i + 2i + i^2 = 5 + 5i$. On retrouve bien le numérateur.

Théorème — Conjugué et module d'un quotient

Pour tous nombres complexes z et z' , avec $z' \neq 0$:

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Exemple : $\left|\frac{5 + 5i}{2 + i}\right| = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}$, et en effet $|3 + i| = \sqrt{10}$.

Erreur fréquente — On ne divise pas partie par partie

$\frac{4+6i}{2+3i}$ ne vaut pas $\frac{4}{2} + \frac{6i}{3} = 2 + 2i$. Le calcul correct donne 2, car $4 + 6i = 2 \times (2 + 3i)$. Un contrôle suffit à voir l'erreur : $(2 + 2i)(2 + 3i) = -2 + 10i$, et non $4 + 6i$.

Application 10 – Trois quotients

Écrire sous forme algébrique : $\frac{2}{1+i}$, $\frac{3+i}{1-i}$ et $\frac{-1+5i}{2+3i}$.

Correction — Application 10

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{2} = 1-i.$$

$$\frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \frac{3+3i+i+i^2}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i.$$

$$\frac{-1+5i}{2+3i} = \frac{(-1+5i)(2-3i)}{4+9} = \frac{-2+3i+10i-15i^2}{13} = \frac{13+13i}{13} = 1+i.$$

Conduite : faire contrôler chaque résultat par un produit, comme dans l'exemple.

Application 11 – Le module avant le calcul

On pose $q = \frac{-5+12i}{3+4i}$.

- Sans calculer q , déterminer $|q|$.
- Écrire q sous forme algébrique, puis vérifier le résultat du a.
- En déduire $\bar{q}$.

Correction — Application 11

$$\text{a. } |q| = \frac{|-5+12i|}{|3+4i|} = \frac{13}{5} = 2,6.$$

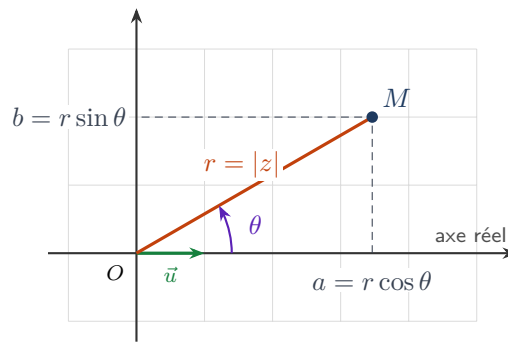
$$\text{b. } q = \frac{(-5+12i)(3-4i)}{25} = \frac{-15+20i+36i-48i^2}{25} = \frac{33+56i}{25} = 1,32 + 2,24i. \quad |q| = \sqrt{1,32^2 + 2,24^2} = \sqrt{1,7424 + 5,0176} = \sqrt{6,76} = 2,6.$$

$$\text{c. } \bar{q} = 1,32 - 2,24i ; \text{ on le retrouve avec } \frac{-5+12i}{3+4i} = \frac{-5-12i}{3-4i}.$$

7 Argument et forme trigonométrique (C7)**Définition — Argument**

Soit z un nombre complexe **non nul** et M son point image. Un **argument** de z est une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OM})$, compté positivement dans le sens direct. On le note $\arg(z)$.

Un argument n'est défini qu'à un tour près (360° , soit 2π radians) : on donne celui qui est compris entre -180° (exclu) et 180° , soit entre $-\pi$ et π .



Le point M d'affixe $z = a + ib$ est à la distance $r = |z|$ de O , et le segment $[OM]$ fait l'angle θ avec le vecteur $\vec{u}$. Ici $r = 4$ et $\theta = 30^\circ$: $a = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \approx 3,46$ et $b = 4 \sin 30^\circ = 2$.

Théorème — Forme trigonométrique

Si $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, alors $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$, donc

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

C'est la **forme trigonométrique** de z . Réciproquement, $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

θ en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Valeurs remarquables du cosinus et du sinus. Pour un angle obtus ou négatif, la calculatrice (en mode degré) donne la valeur, par exemple $\cos 120^\circ = -0,5$.

Méthode — De la forme algébrique à la forme trigonométrique

1. Calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Calculer $\cos \theta = \frac{a}{r}$.
3. Obtenir l'angle avec la touche $\cos^{-1}$ (mode degré) : elle donne un angle entre 0° et 180° . Si $b \geq 0$, c'est θ ; si $b < 0$, on prend son opposé.
4. Écrire $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$.

Exemple — Deux formes trigonométriques

1. $z = 1 - i\sqrt{3}$: $r = \sqrt{1+3} = 2$; $\cos \theta = \frac{1}{2}$, et $\cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$. Comme $b = -\sqrt{3} < 0$, $\theta = -60^\circ$ (soit $-\frac{\pi}{3}$). $z = 2(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ))$.
2. $z = -3 + 4i$: $r = 5$; $\cos \theta = \frac{-3}{5} = -0,6$, et $\cos^{-1}(-0,6) \approx 126,9^\circ$. Comme $b = 4 > 0$, $\theta \approx 126,9^\circ$. $z \approx 5(\cos 126,9^\circ + i \sin 126,9^\circ)$.

Méthode — De la forme trigonométrique à la forme algébrique

On calcule $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

Exemple : $z = 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, donc $z = -3\sqrt{3} + 3i \approx -5,20 + 3i$.

Remarque — Quelques arguments à connaître

Un réel positif a pour argument 0° , un réel négatif 180° ; un imaginaire pur ib a pour argument 90° si $b > 0$ et -90° si $b < 0$. Le conjugué $\bar{z}$, symétrique par rapport à l'axe réel, a pour argument $-\arg(z)$.

Erreur fréquente — La touche $\cos^{-1}$ ne voit pas le signe de b

Pour $z = 1 - i\sqrt{3}$, la calculatrice affiche 60° ; le point est pourtant sous l'axe réel. Toujours regarder le signe de b avant de conclure. La touche $\tan^{-1}$ appliquée à $\frac{b}{a}$ donne un angle faux dès que $a < 0$: on ne l'utilise pas ici.

Application 12 – Quatre formes trigonométriques

Écrire sous forme trigonométrique : $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -\sqrt{3} - i$ et $z_4 = 5 - 12i$ (angle arrondi au dixième de degré).

Correction — Application 12

$$z_1 : r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, b > 0, \text{ donc } \theta = 45^\circ : z_1 = 3\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$$

$$z_2 : r = 2, \text{ réel négatif, } \theta = 180^\circ : z_2 = 2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$

$$z_3 : r = \sqrt{3+1} = 2, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donne } 150^\circ ; b < 0, \text{ donc } \theta = -150^\circ : z_3 = 2(\cos(-150^\circ) + i \sin(-150^\circ)).$$

$$z_4 : r = \sqrt{25+144} = 13, \cos \theta = \frac{5}{13} \approx 0,3846 \text{ donne } \approx 67,4^\circ ; b < 0, \text{ donc } \theta \approx -67,4^\circ : z_4 \approx 13(\cos(-67,4^\circ) + i \sin(-67,4^\circ)).$$

Conduite : faire placer approximativement chaque point pour contrôler le quadrant.

Application 13 – Retour à la forme algébrique

Écrire sous forme algébrique : $4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, $10(\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ))$ et $3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$.

Correction — Application 13

$$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \approx 2,83 + 2,83i.$$

$$10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 5\sqrt{3} - 5i \approx 8,66 - 5i, \text{ car } \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ \text{ et } \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ.$$

$$3(0 + 1 \times i) = 3i.$$

8 Un usage en électricité : la notation j (C1, C5, C6, C7)

En électricité, la lettre i désigne déjà l'intensité d'un courant. Pour éviter la confusion, les électriciens notent j l'unité imaginaire : $j^2 = -1$. Tous les calculs de ce chapitre restent valables, en écrivant j à la place de i .

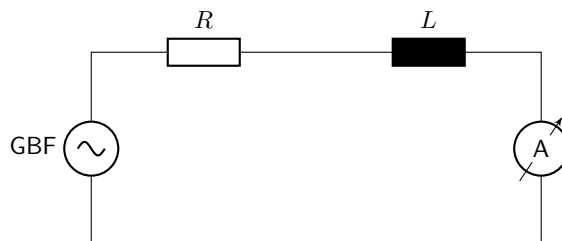
Remarque — Relations d'électricité fournies (non exigibles)

En courant alternatif sinusoïdal de fréquence f , on note $\omega = 2\pi f$ (en rad/s). On associe à un dipôle une **impédance complexe** $Z = R + jX$, en ohms :

— résistance R : $Z = R$; bobine idéale d'inductance L : $Z = jL\omega$; condensateur de capacité C :

$$Z = \frac{1}{jC\omega};$$

- dans un montage **en série**, les impédances complexes s'additionnent ;
- le module $|Z|$ relie les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité : $U = |Z| \times I$; un argument φ de Z est le **déphasage** de la tension par rapport à l'intensité, et $\cos \varphi$ est le facteur de puissance.



Montage de laboratoire vu en schéma : un générateur basse fréquence (GBF) alimente, en série, une résistance R , une bobine d'inductance L et un ampèremètre.

Exemple — Un dipôle RL au laboratoire

$R = 100 \, \Omega$, $L = 0,10 \, \text{H}$, fréquence $f = 250 \, \text{Hz}$, tension efficace $U = 3,0 \, \text{V}$.

$\omega = 2\pi \times 250 \approx 1\,571 \, \text{rad/s}$ et $L\omega \approx 157 \, \Omega$, donc $Z = R + jL\omega \approx 100 + 157j$.

$|Z| = \sqrt{100^2 + 157^2} \approx 186 \, \Omega$ et $I = \frac{U}{|Z|} = \frac{3,0}{186} \approx 0,016 \, \text{A}$, soit $16 \, \text{mA}$.

$\cos \varphi = \frac{100}{186} \approx 0,537$, et $\cos^{-1}(0,537) \approx 57,5^\circ$; la partie imaginaire est positive, donc $\varphi \approx 57,5^\circ$: la tension est en avance sur l'intensité. $Z \approx 186 (\cos 57,5^\circ + j \sin 57,5^\circ)$.

Application 14 – Un dipôle RC

On remplace la bobine par un condensateur de capacité $C = 1,0 \, \mu\text{F}$ et l'on règle $f = 1\,000 \, \text{Hz}$. On garde $R = 100 \, \Omega$ et $U = 3,0 \, \text{V}$.

a. Montrer que $\frac{1}{j} = -j$. En déduire que l'impédance du condensateur s'écrit $-\frac{j}{C\omega}$.

b. Avec $\omega \approx 6\,283 \, \text{rad/s}$, calculer $\frac{1}{C\omega}$, puis écrire l'impédance Z du dipôle.

c. Calculer $|Z|$, l'intensité efficace I et le déphasage φ .

Correction — Application 14

a. $\frac{1}{j} = \frac{-j}{j \times (-j)} = \frac{-j}{-j^2} = \frac{-j}{1} = -j$, donc $\frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j} \times \frac{1}{C\omega} = -\frac{j}{C\omega}$.

b. $\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{1,0 \times 10^{-6} \times 6283} \approx 159 \, \Omega$, donc $Z \approx 100 - 159j$.

c. $|Z| = \sqrt{100^2 + 159^2} \approx 188 \, \Omega$; $I = \frac{3,0}{188} \approx 0,016 \, \text{A}$; $\cos \varphi = \frac{100}{188} \approx 0,53$ donne $\approx 58^\circ$, et la partie imaginaire est négative : $\varphi \approx -58^\circ$. La tension est en retard sur l'intensité.

Conduite : la question a. est un quotient (§6) : on multiplie par le conjugué de j , qui est $-j$.

Bilan – Je sais faire

À retenir

Deux écritures d'un même nombre, avec $i^2 = -1$:

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad z = r (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$. Conjugué : $\bar{z} = a - ib$. Affixe de $\vec{AB}$: $z_B - z_A$, et $AB = |z_B - z_A|$.

Méthode — Choisir la bonne écriture

Additionner, multiplier, comparer : forme algébrique. **Diviser** : multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur. **Mesurer une distance** : module d'une différence. **Repérer une direction**, une rotation, un déphasage : argument et forme trigonométrique. **Module d'un produit ou d'un quotient** : produit ou quotient des modules, sans développer.

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Ai-je remplacé chaque i^2 par -1 ? 2. Ma partie imaginaire est-elle un nombre réel, sans i ? 3. Mon quotient, multiplié par le dénominateur, redonne-t-il le numérateur ? 4. Mon module est-il positif, et mon argument dans le bon quadrant (signes de a et de b) ? 5. Un croquis du point confirme-t-il le résultat ?

Remarque — Ce que ce chapitre ne demande pas

La résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$ et la forme exponentielle $r e^{i\theta}$ ne font pas partie du programme de ce module : elles se rencontrent dans la suite des études.