

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 9

Fonctions logarithme népérien et exponentielle

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Ce chapitre relève du **programme complémentaire de préparation à une poursuite d'études** : il n'est pas évalué à l'épreuve du baccalauréat.

Pour l'aborder, il faut savoir : lire une pente sur une tangente et utiliser le signe de la dérivée pour trouver le sens de variation d'une fonction (Première) ; connaître la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$; calculer avec les puissances et utiliser les fonctions $x \mapsto q^x$ et le logarithme décimal $\log$ (chapitre 5). La calculatrice, avec ses touches **ln** et **e^x**, est nécessaire ; une partie se fait devant un logiciel de géométrie dynamique ou une calculatrice graphique.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme népérien, sur un intervalle donné	§1 La fonction ln ; §2 Variations et courbe ; §3 Le nombre e	2 él. 2
C2 – Utiliser les propriétés opératoires de la fonction logarithme népérien pour transformer des écritures numériques ou littérales	§4 Propriétés opératoires ; §5 ln et log	6 él. 6
C3 – Passer de $\ln(x) = a$ à $x = e^a$ et inversement, a étant un réel et x un réel strictement positif	§6 De $\ln(x) = a$ à $x = e^a$; §7 Résoudre une équation	8 él. 8
C4 – Utiliser les propriétés opératoires de la fonction exponentielle pour transformer des écritures numériques ou littérales	§8 Propriétés opératoires de l'exponentielle	10 él. 10
C5 – Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$	§9 Variations et courbe de l'exponentielle	11 él. 11
C3, C4 et C5 – Réinvestissement dans des situations	§10 Modéliser : refroidissement, doublement, décroissance	13 él. 13

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Les parties se lisent dans l'ordre : on construit d'abord la fonction **ln**, puis le nombre **e**, puis la fonction **exponentielle**. Les encadrés « Aller plus loin » dépassent le programme du complément ; ils préparent le BTS.

1 La fonction logarithme népérien (C1)

Au chapitre 5, le logarithme décimal $\log$ a été construit à partir de la fonction $x \mapsto 10^x$. Le logarithme *népérien* se définit autrement : par sa valeur en 1 et par la **pente** de sa courbe en chaque point.

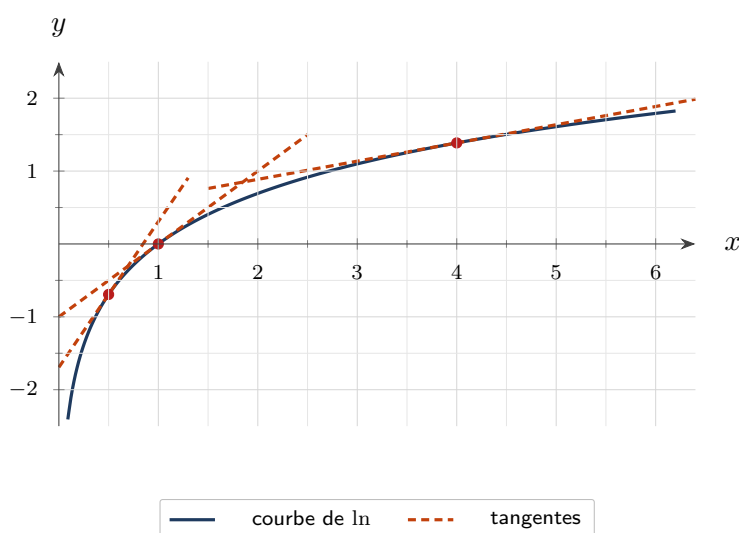
Définition — Fonction logarithme népérien

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui **s'annule en 1** et dont la **dérivée est la fonction inverse** :

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Elle n'est définie que pour $x > 0$: $\ln(0)$ et $\ln(-2)$ n'existent pas.

Il n'existe pas de formule « simple » pour calculer $\ln(x)$: la touche **ln** de la calculatrice donne une valeur approchée. En revanche, la pente de la tangente se connaît partout : au point d'abscisse a , elle vaut $\frac{1}{a}$.



Courbe de $\ln$ sur $]0; 6]$ et trois tangentes, aux points d'abscisses 0,5, 1 et 4. Leurs pentes valent $\frac{1}{0,5} = 2$, $\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{1}{4} = 0,25$: plus x est grand, plus la tangente est plate.

Exemple — La tangente au point d'abscisse 1

Au point d'abscisse 1 : $\ln(1) = 0$ et la pente vaut $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Avec l'équation réduite de la tangente vue en Première, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: $y = 1 \times (x - 1) + 0$, soit $y = x - 1$.

Sur la figure, la tangente en 1 est au-dessus de la courbe partout ailleurs.

Erreur fréquente — $\ln'(x)$ n'est pas $\ln(x)$

$\ln(4) \approx 1,39$ est la **hauteur** du point de la courbe ; $\ln'(4) = 0,25$ est la **pente** de la tangente en ce point. Deux nombres différents, qui répondent à deux questions différentes.

Application 1 – Valeurs et pentes

- a. À la calculatrice, donner une valeur arrondie au centième de $\ln(0,5)$, $\ln(3)$ et $\ln(8)$.
 b. Donner la pente de la tangente à la courbe de $\ln$ aux points d'abscisses 0,5, 4 et 10.
 c. Pourquoi la calculatrice affiche-t-elle une erreur pour $\ln(-3)$?

Correction — Application 1

- a. $\ln(0,5) \approx -0,69$ $\ln(3) \approx 1,10$ $\ln(8) \approx 2,08$.
 b. La pente vaut $\frac{1}{a}$: $\frac{1}{0,5} = 2$; $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{10} = 0,1$.
 c. $\ln$ n'est définie que pour les nombres **strictement positifs** : -3 n'appartient pas à $]0 ; +\infty[$.
Conduite : faire comparer a. et b. — $\ln(0,5)$ est négatif, mais la pente en 0,5 est positive. Ce contraste prépare le §2.

2 Variations et courbe de la fonction $\ln$ (C1)**Proposition — Sens de variation de $\ln$**

Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. D'après le théorème de Première (signe de la dérivée), la fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	+
$\ln(x)$		0	↗
		↗	

Tableau de variations de $\ln$. La double barre rappelle que $\ln$ n'est pas définie en 0. La fonction passe par la valeur 0 en $x = 1$.

Remarque — Signe de $\ln(x)$ et allure de la courbe

Comme $\ln$ est croissante et que $\ln(1) = 0$:

$$\ln(x) < 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \quad \ln(1) = 0 \quad \ln(x) > 0 \text{ pour } x > 1.$$

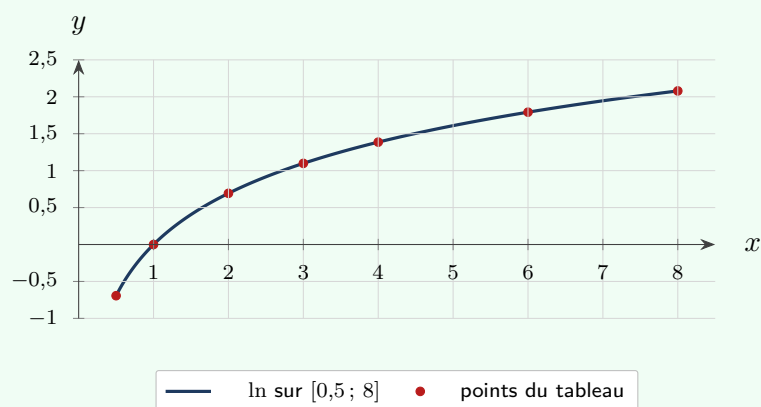
Quand x se rapproche de 0, $\ln(x)$ devient très négatif : la courbe longe l'axe des ordonnées vers le bas sans jamais le toucher. Quand x grandit, $\ln(x)$ augmente toujours, mais de plus en plus lentement : la pente $\frac{1}{x}$ s'aplatit.

Méthode — Représenter $\ln$ sur un intervalle donné

1. Choisir des valeurs de x dans l'intervalle, plus serrées près de 0. 2. Calculer $\ln(x)$ à la calculatrice, arrondi au centième. 3. Placer les points, puis les relier par une courbe **lisse** qui monte en s'aplatissant — jamais par des segments.

Exemple — La courbe de $\ln$ sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$

x	0,5	1	2	3	4	6	8
$\ln(x)$	-0,69	0	0,69	1,10	1,39	1,79	2,08



Les sept points du tableau, en rouge, et la courbe lisse qui les relie, en bleu. La courbe coupe l'axe des abscisses au point (1 ; 0).

Erreur fréquente — Négative ne veut pas dire décroissante

Sur $]0 ; 1[$, $\ln(x)$ est **négatif**, et pourtant la fonction **monte** : $\ln(0,2) \approx -1,61$ et $\ln(0,5) \approx -0,69$. C'est le signe de la **dérivée** qui donne le sens de variation, jamais celui de la fonction.

Remarque — Comparer grâce aux variations

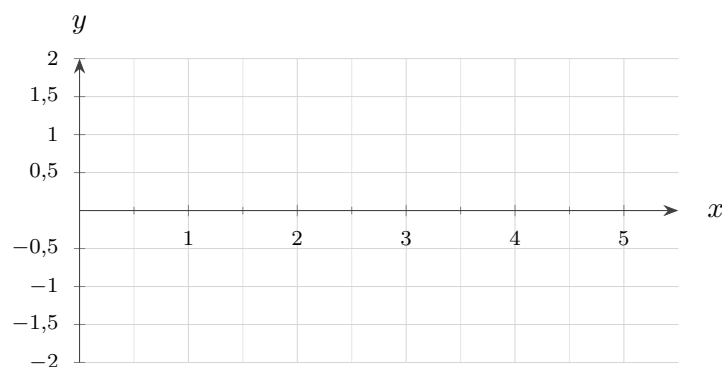
Comme $\ln$ est strictement croissante, pour $a > 0$ et $b > 0$: $a < b$ **équivalent à** $\ln(a) < \ln(b)$. Par exemple $\ln(0,3) < \ln(0,4)$, sans calculatrice.

Application 2 – Tracer la courbe de $\ln$ sur $[0,2; 5]$

a. Compléter le tableau de valeurs, arrondies au centième.

x	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$\ln(x)$							

b. Tracer la courbe de $\ln$ sur $[0,2; 5]$ dans le repère ci-dessous.



Repère pour le tracé : x de 0 à 5,5, y de -2 à 2 , une graduation tous les 0,5 en ordonnée.

c. Sur quel intervalle $\ln(x)$ est-il négatif ?

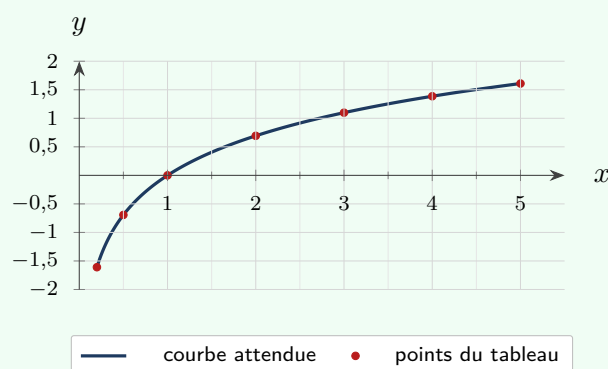
d. Sans calculatrice, comparer $\ln(0,7)$ et $\ln(0,9)$, puis $\ln(4)$ et 0 .

Correction — Application 2

a.

x	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$\ln(x)$	-1,61	-0,69	0	0,69	1,10	1,39	1,61

b. Courbe lisse qui passe par $(1; 0)$ et monte en s'aplatissant :



c. $\ln(x) < 0$ sur $]0,2; 1[$ — plus généralement sur $]0; 1[$.

d. $0,7 < 0,9$ et $\ln$ est croissante, donc $\ln(0,7) < \ln(0,9)$. $4 > 1$ donc $\ln(4) > \ln(1) = 0$.

Conduite : exiger une courbe lisse ; un tracé en segments passe à côté de l'idée « la pente diminue ».

3 Le nombre e (C1)

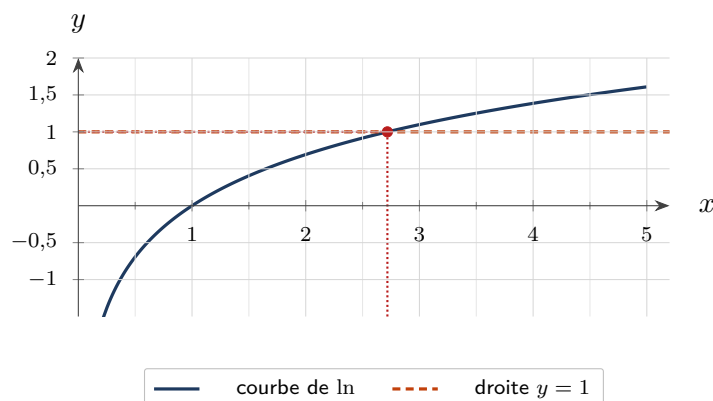
La fonction $\ln$ est croissante et sa courbe monte sans limite : elle coupe une seule fois la droite d'équation $y = 1$.

Définition — Le nombre e

Le nombre e est l'**unique solution** de l'équation $\ln(x) = 1$:

$$\ln(e) = 1 \quad e \approx 2,718$$

Il joue pour $\ln$ le rôle que 10 joue pour $\log$: $\log(10) = 1$ et $\ln(e) = 1$.



La droite horizontale $y = 1$ coupe la courbe de $\ln$ en un seul point. Son abscisse, lue sur l'axe en pointillés, est le nombre e, un peu plus grand que 2,7.

Exemple — Encadrer e au centième par balayage

À la calculatrice : $\ln(2,7) \approx 0,9933$ et $\ln(2,8) \approx 1,0296$. Comme $\ln$ est croissante, $2,7 < e < 2,8$.

On affine : $\ln(2,71) \approx 0,9969$ et $\ln(2,72) \approx 1,0006$, donc **2,71** < e < **2,72**.

La calculatrice donne directement $e \approx 2,718\,282$ avec la touche e^x appliquée à 1.

Erreur fréquente — e est un nombre, pas une inconnue

e est une constante, comme π . Dans $3e$, on multiplie 3 par 2,718... : $3e \approx 8,15$. Ne pas écrire $3e = 3$.

Application 3 – Le nombre e sur la calculatrice

- Calculer $\ln(2,715)$ et $\ln(2,72)$. En déduire un encadrement de e d'amplitude 0,005.
- Donner une valeur approchée à 0,01 près de $2e$ et de $\frac{e}{2}$.
- Sans calculatrice, donner le signe de $\ln(2,5) - 1$.

Correction — Application 3

a. $\ln(2,715) \approx 0,9988$ et $\ln(2,72) \approx 1,0006$: la valeur 1 est entre les deux et $\ln$ est croissante, donc $2,715 < e < 2,72$.

b. $2e \approx 5,44$ $\frac{e}{2} \approx 1,36$.

c. $2,5 < e$ donc $\ln(2,5) < \ln(e) = 1$: $\ln(2,5) - 1$ est **négatif**.

Conduite : le c. se fait sans touche $\ln$. C'est l'usage de la croissance qui est visé.

4 Propriétés opératoires du logarithme népérien (C2)

À la calculatrice, $\ln(2) \approx 0,6931$, $\ln(3) \approx 1,0986$ et $\ln(6) \approx 1,7918$: $\ln(2) + \ln(3) = \ln(6)$. Le logarithme transforme les **produits** en **sommes**. C'est pour simplifier les calculs de produits que John Napier (Neper) a inventé les logarithmes, en 1614.

Proposition — Propriétés opératoires de $\ln$ (admisses)

Pour tous nombres $a > 0$ et $b > 0$, et tout nombre réel n :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

Ce sont les mêmes règles que pour $\log$, vues au chapitre 5.

Exemple — Écrire à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(3)$

$$\ln(12) = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln(2) + \ln(3).$$

$$\ln(4,5) = \ln\left(\frac{9}{2}\right) = \ln(3^2) - \ln(2) = 2 \ln(3) - \ln(2).$$

$$\ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln(2^3) = -3 \ln(2).$$

Exemple — Écrire sous la forme d'un seul logarithme

$$\ln(5) + \ln(4) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5 \times 4}{2}\right) = \ln(10).$$

$$3 \ln(2) - \ln(4) = \ln(2^3) - \ln(4) = \ln\left(\frac{8}{4}\right) = \ln(2).$$

$$\text{Pour } x > 0 : \ln(3x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \ln(3).$$

Erreur fréquente — Trois confusions à éviter

$\ln(a + b)$ n'est **pas** $\ln(a) + \ln(b)$: $\ln(1 + 1) = \ln(2) \approx 0,69$, alors que $\ln(1) + \ln(1) = 0$.

$\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ n'est **pas** $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$: $\frac{\ln(8)}{\ln(2)} = 3$, alors que $\ln(4) \approx 1,39$.

$\ln(2x)$ n'est **pas** $2 \ln(x)$: $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$, et $2 \ln(x) = \ln(x^2)$.

Application 4 – Transformer des écritures

On donne $\ln(2) \approx 0,693$ et $\ln(5) \approx 1,609$.

a. Écrire $\ln(10)$, $\ln(25)$, $\ln(0,4)$ et $\ln(1,25)$ à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(5)$, puis en donner une valeur approchée.

b. Écrire sous la forme d'un seul logarithme : $\ln(7) + \ln(3)$; $\ln(36) - 2 \ln(3)$.

c. Pour $x > 0$, simplifier $\ln(x^3) - \ln(x)$.

Correction — Application 4

a. $\ln(10) = \ln(2) + \ln(5) \approx 2,302$ $\ln(25) = 2 \ln(5) \approx 3,218$

$\ln(0,4) = \ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln(2) - \ln(5) \approx -0,916$ $\ln(1,25) = \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln(5) - 2 \ln(2) \approx 0,223$.

b. $\ln(7) + \ln(3) = \ln(21)$ $\ln(36) - 2 \ln(3) = \ln(36) - \ln(9) = \ln(4)$.

c. $\ln(x^3) - \ln(x) = 3 \ln(x) - \ln(x) = 2 \ln(x)$ (ou $\ln(x^2)$).

Contrôle : à la calculatrice, $\ln(0,4) \approx -0,916$ et $\ln(1,25) \approx 0,223$. Un nombre inférieur à 1 a un logarithme négatif.

5 Logarithme népérien et logarithme décimal (C2)

Proposition — Passer de $\ln$ à $\log$

Pour tout $x > 0$: $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ avec $\ln(10) \approx 2,303$.

Pourquoi ? Si $y = \log(x)$, alors $x = 10^y$. Avec la propriété des puissances : $\ln(x) = \ln(10^y) = y \ln(10)$, donc $y = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Méthode — Résoudre $q^x = b$ avec $\ln$

Comme au chapitre 5 avec $\log$: appliquer $\ln$ aux deux membres, utiliser $\ln(q^x) = x \ln(q)$, puis diviser :

$$q^x = b \quad \text{donne} \quad x = \frac{\ln(b)}{\ln(q)} \quad (q > 0, q \neq 1, b > 0).$$

Le résultat est le même qu'avec $\log$: les deux quotients sont égaux.

Exemple — Deux calculs avec la touche $\ln$

$$\log(500) = \frac{\ln(500)}{\ln(10)} \approx \frac{6,2146}{2,3026} \approx 2,699.$$

$$\text{Résoudre } 1,05^n = 2 : n \ln(1,05) = \ln(2), \text{ donc } n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \approx 14,2.$$

Application 5 – La touche $\ln$ suffit

- Calculer $\log(2\,000)$ en n'utilisant que la touche $\ln$.
- Résoudre $0,8^x = 0,1$ avec $\ln$. Arrondir au centième.
- Refaire le b. avec $\log$ et comparer.

Correction — Application 5

$$\text{a. } \log(2\,000) = \frac{\ln(2\,000)}{\ln(10)} \approx \frac{7,6009}{2,3026} \approx 3,301.$$

$$\text{b. } x \ln(0,8) = \ln(0,1), \text{ donc } x = \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} \approx \frac{-2,3026}{-0,2231} \approx \mathbf{10,32}.$$

$$\text{c. } x = \frac{\log(0,1)}{\log(0,8)} \approx \frac{-1}{-0,0969} \approx 10,32 : \text{ même résultat.}$$

Conduite : faire remarquer que les deux logarithmes sont négatifs ; leur quotient est positif, ce qui est cohérent avec $0,8^x$ qui décroît de 1 vers 0,1.

6 De $\ln(x) = a$ à $x = e^a$ (C3)

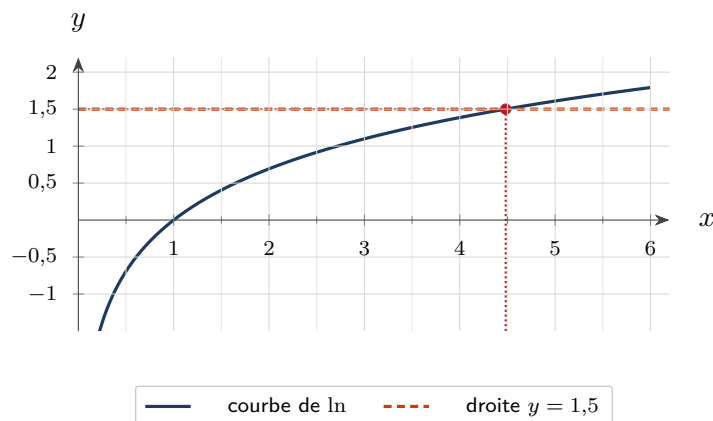
La courbe de $\ln$ monte sans fin et descend sans fin : **toute** droite horizontale $y = a$ la coupe en un seul point.

Définition — Exponentielle d'un nombre

Pour tout réel a , l'équation $\ln(x) = a$ a une seule solution, strictement positive. On la note e^a (« exponentielle de a ») :

$$\ln(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^a \quad (x > 0, a \text{ réel})$$

En particulier $e^0 = 1$ (car $\ln(1) = 0$) et $e^1 = e$ (car $\ln(e) = 1$).



La droite $y = 1,5$ coupe la courbe de $\ln$ au point d'abscisse $e^{1,5} \approx 4,48$: c'est l'unique nombre dont le logarithme vaut 1,5.

Proposition — Deux simplifications

Pour tout réel a : $\ln(e^a) = a$. Pour tout $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$.

Et $e^a > 0$ pour tout réel a : l'exponentielle d'un nombre est toujours strictement positive.

La notation est bien celle d'une puissance : $\ln(e \times e) = \ln(e) + \ln(e) = 2$, donc $e \times e = e^2$.

Exemple — Passer d'une écriture à l'autre

$\ln(x) = 2$ équivaut à $x = e^2 \approx 7,39$.

$e^x = 5$ équivaut à $x = \ln(5) \approx 1,61$.

$\ln(x) = -1$ équivaut à $x = e^{-1} \approx 0,37$: une solution **positive**, même si $a = -1$ est négatif.

$e^x = -3$ n'a **aucune** solution, car $e^x > 0$.

Erreur fréquente — $\ln(x) = a$ ne demande pas $a > 0$

C'est x qui doit être positif, pas a : $\ln(x) = -2$ a pour solution $x = e^{-2} \approx 0,135$. En revanche, $e^x = b$ n'a de solution que si $b > 0$.

Application 6 – Traduire

- a. Résoudre, puis arrondir au centième : $\ln(x) = 3$; $\ln(x) = -0,5$; $e^x = 20$; $e^x = 0,5$; $e^x = -4$.
b. Simplifier sans calculatrice : $\ln(e^{2,5})$ et $e^{\ln(7)}$.

Correction — Application 6

a. $x = e^3 \approx 20,09$; $x = e^{-0,5} \approx 0,61$; $x = \ln(20) \approx 3,00$; $x = \ln(0,5) \approx -0,69$; $e^x = -4$ n'a **pas de solution** ($e^x > 0$).

b. $\ln(e^{2,5}) = 2,5$ $e^{\ln(7)} = 7$.

Contrôle : $\ln(20,09) \approx 3$; $e^3 \approx 20$ et $\ln(20) \approx 3$: les deux premières lignes du a. se répondent.

7 Résoudre une équation avec $\ln$ ou $\exp$ (C3)

Méthode — Isoler, traduire, conclure

1. Isoler l'exponentielle (ou le logarithme) : l'écrire seule dans un membre. **2. Traduire** : $e^u = b$ donne $u = \ln(b)$ si $b > 0$; $\ln(u) = a$ donne $u = e^a$. **3. Finir** le calcul, donner la valeur exacte puis une valeur approchée, et **vérifier**.

Exemple — Trois équations résolues

$$3e^x - 2 = 10 : 3e^x = 12, e^x = 4, x = \ln(4) \approx 1,39.$$

$$2\ln(x) + 1 = 5 : 2\ln(x) = 4, \ln(x) = 2, x = e^2 \approx 7,39 ; x > 0 \checkmark.$$

$$e^{2x} = 9 : 2x = \ln(9), x = \frac{\ln(9)}{2} = \ln(3) \approx 1,10.$$

Erreur fréquente — Isoler avant de traduire

Dans $3e^x - 2 = 10$, écrire $x = \ln(10)$ en « supprimant » le 3 et le -2 est faux. On n'applique la traduction qu'à une exponentielle **seule**.

Application 7 – Cinq équations

Résoudre, en donnant la valeur exacte puis une valeur approchée au centième :

a. $5e^x = 35$ **b.** $e^x + 3 = 11$ **c.** $4\ln(x) = 6$ **d.** $e^{0,5x} = 3$ **e.** $\ln(x) - 1 = 0$

Correction — Application 7

a. $e^x = 7, x = \ln(7) \approx 1,95.$ **b.** $e^x = 8, x = \ln(8) \approx 2,08.$

c. $\ln(x) = 1,5, x = e^{1,5} \approx 4,48.$ **d.** $0,5x = \ln(3), x = 2\ln(3) \approx 2,20.$

e. $\ln(x) = 1, x = e \approx 2,72.$

Conduite : faire vérifier chaque résultat en le remplaçant dans l'équation de départ, à la calculatrice : $5e^{1,95} \approx 35$.

8 Propriétés opératoires de l'exponentielle (C4)

La fonction **exponentielle** est la fonction $x \mapsto e^x$, définie sur $\mathbb{R}$. Ses règles de calcul découlent de celles de $\ln$.

Proposition — Propriétés opératoires de l'exponentielle

Pour tous réels a et b , et tout entier n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad (e^a)^n = e^{na}$$

Pourquoi ? $\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$. Le nombre $e^a \times e^b$ a donc pour logarithme $a + b$: c'est e^{a+b} .

Remarque — Un cas particulier des fonctions $x \mapsto q^x$

L'exponentielle est la fonction $x \mapsto q^x$ du chapitre 5 pour la base $q = e$: elle en a les mêmes règles. Inversement, toute fonction $x \mapsto q^x$ s'écrit avec e :

$$q^x = e^{x \ln(q)} \quad (q > 0) \quad \text{par exemple} \quad 2^x = e^{x \ln(2)} \approx e^{0,693x}.$$

Exemple — Simplifier

$$e^3 \times e^{-1} = e^2 \quad \frac{e^5}{e^2} = e^3 \quad (e^2)^3 = e^6 \quad e^{2x} \times e^{-x} = e^x \quad \frac{e^{x+1}}{e} = e^x.$$

Erreur fréquente — Somme et produit ne s'échangent pas n'importe comment

e^{a+b} n'est **pas** $e^a + e^b$: $e^{1+1} = e^2 \approx 7,39$, alors que $e^1 + e^1 \approx 5,44$.

e^2 n'est **pas** $2e$: $e^2 \approx 7,39$ et $2e \approx 5,44$.

$(e^3)^2 = e^6$, et non e^5 : l'exposant se **multiplie**.

Application 8 – Simplifier et réécrire

- a. Écrire sous la forme e^k : $e^4 \times e^{-3}$; $\frac{e^7}{e^9}$; $(e^{-1})^4$; $\frac{1}{e^{-2}}$.
- b. Simplifier : $e^x \times e^x$; $\frac{e^{3x}}{e^x}$.
- c. Écrire 5^x sous la forme e^{kx} , en donnant k exactement puis arrondi au millième.

Correction — Application 8

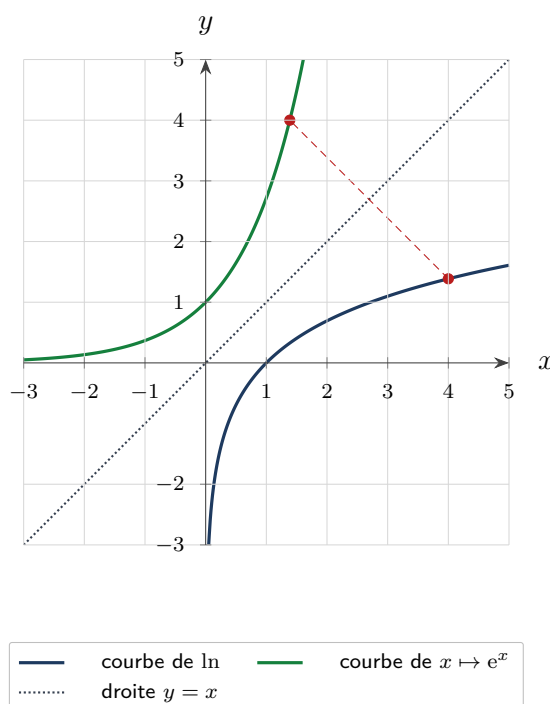
- a. $e^1 = e$; e^{-2} ; e^{-4} ; e^2 .
- b. e^{2x} ; e^{2x} .
- c. $5^x = e^{x \ln(5)}$, donc $k = \ln(5) \approx 1,609$.
- Contrôle : $5^2 = 25$ et $e^{2 \times 1,609} \approx e^{3,218} \approx 25$.

9 Variations et courbe de l'exponentielle (C5)

Le point $(a; e^a)$ et le point $(e^a; a)$ ont leurs coordonnées échangées. Le second est sur la courbe de $\ln$, puisque $\ln(e^a) = a$. Or échanger les coordonnées revient à prendre le **symétrique par rapport à la droite** $y = x$.

Proposition — Courbe de l'exponentielle

Dans un repère orthonormé, la courbe de $x \mapsto e^x$ est la **symétrique** de la courbe de $\ln$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Un logiciel de géométrie dynamique la construit avec l'outil « Symétrie axiale ».



Repère orthonormé. Le point $(4; 1,39)$ de la courbe de $\ln$ (bleue) et son symétrique $(1,39; 4)$ sur la courbe de l'exponentielle (verte), reliés en tirets rouges de part et d'autre de la droite $y = x$ (pointillés).

Proposition — Variations de l'exponentielle

- $e^x > 0$ pour tout réel x : la courbe est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.
- $e^0 = 1$: la courbe passe par le point $(0; 1)$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ — comme toute fonction $x \mapsto q^x$ de base $q > 1$ (chapitre 5), puisque $e \approx 2,718 > 1$.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x		

Tableau de variations de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: elle croît partout. Pour x très négatif, e^x se rapproche de 0 sans l'atteindre (l'axe des abscisses est une asymptote) ; pour x grand, elle croît de plus en plus vite.

Exemple — La courbe de l'exponentielle sur $[-2; 2]$

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
e^x	0,14	0,37	0,61	1	1,65	2,72	7,39

On place les points puis on trace une courbe lisse, toujours au-dessus de l'axe des abscisses, qui passe par $(0; 1)$.

Remarque — Comparer, et une exponentielle qui décroît

Comme la fonction est croissante : $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$. Ainsi $e^{-0,5} < e^{0,2}$.

Attention au signe devant la variable : $t \mapsto e^{-0,1t}$ est **décroissante**, car $e^{-0,1t} = (e^{-0,1})^t \approx 0,905^t$, une fonction $t \mapsto q^t$ de base $q < 1$.

Erreur fréquente — Une exponentielle n'est jamais négative

Pour $x < 0$, e^x est **petit** mais **positif** : $e^{-2} \approx 0,135$. Une courbe d'exponentielle qui passe sous l'axe des abscisses est fausse.

Remarque — Aller plus loin – La dérivée de l'exponentielle

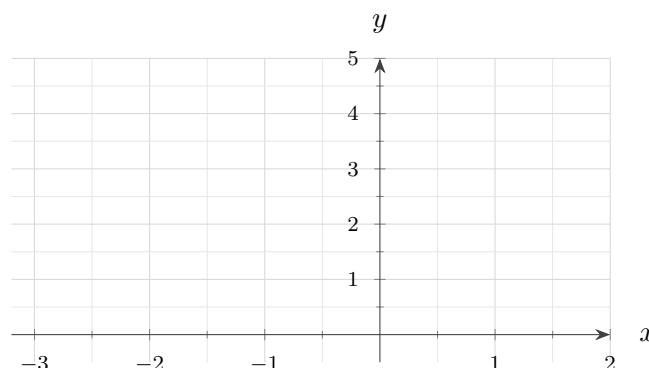
Hors du programme du complément, utile en BTS : la pente de la tangente à la courbe de $x \mapsto e^x$ au point d'abscisse a vaut e^a . Autrement dit, $(e^x)' = e^x$: la fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Application 9 – La courbe de l'exponentielle

a. Compléter le tableau, avec des valeurs arrondies au centième.

x	-3	-1,5	-1	0	0,5	1,5
e^x						

b. Tracer la courbe de l'exponentielle sur $[-3; 1,5]$ dans le repère ci-dessous.



Repère pour le tracé : x de -3 à 2 , y de 0 à 5 , graduations tous les $0,5$.

c. Sans calculatrice, comparer e^{-1} et $e^{-0,9}$.

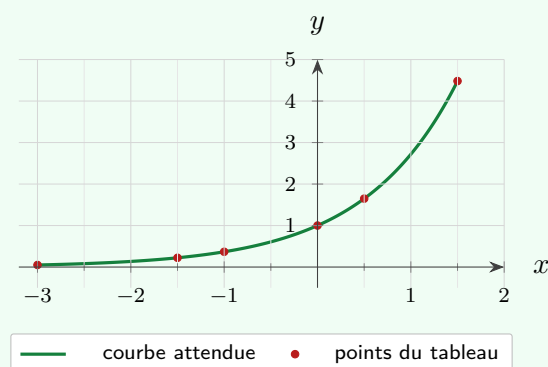
d. La fonction $t \mapsto e^{-0,2t}$ est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

Correction — Application 9

a. x -3 -1,5 -1 0 0,5 1,5

e^x 0,05 0,22 0,37 1 1,65 4,48

b. Courbe lisse, toujours au-dessus de l'axe, passant par $(0; 1)$:



c. $-1 < -0,9$ et l'exponentielle est croissante, donc $e^{-1} < e^{-0,9}$.

d. $e^{-0,2t} = (e^{-0,2})^t \approx 0,819^t$: base inférieure à 1, la fonction est **décroissante**.

Conduite : au d., accepter aussi « quand t augmente, $-0,2t$ diminue, donc $e^{-0,2t}$ diminue ».

10 Modéliser : refroidissement, doublement, décroissance (C3, C4, C5)

Cette partie n'introduit pas de notion nouvelle : elle réunit les outils des parties 6 à 9 pour répondre à la question « au bout de combien de temps ? ».

Méthode — Trouver l'instant où un modèle atteint une valeur

1. Écrire l'équation $f(t) = \text{valeur visée}$.
2. Isoler l'exponentielle.
3. Traduire avec $\ln$ et finir le calcul.
4. Conclure par une phrase avec l'unité, et vérifier avec le sens de variation du modèle.

Exemple — Le refroidissement d'une tasse de thé

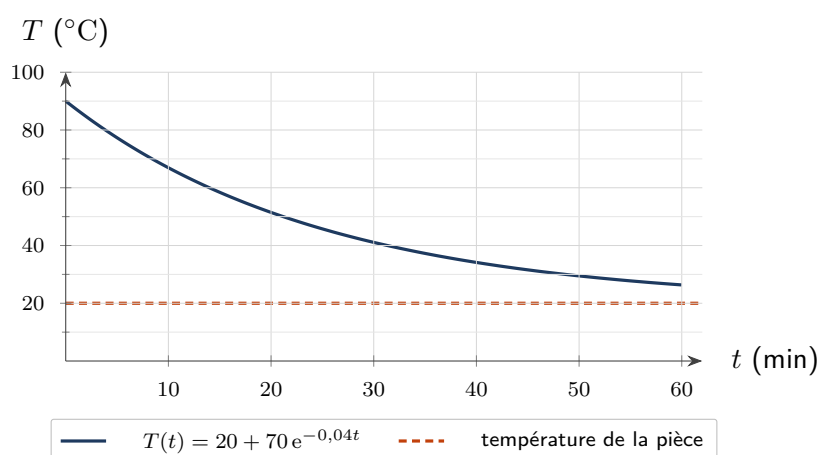
Un thé servi à 90°C refroidit dans une pièce à 20°C . Sa température, en degrés Celsius, est modélisée par $T(t) = 20 + 70e^{-0,04t}$, où t est en minutes. C'est la **loi de refroidissement de Newton**.

$$T(10) = 20 + 70e^{-0,4} \approx 20 + 46,9 = 66,9^\circ\text{C}.$$

Quand le thé est-il à 60°C ? $20 + 70e^{-0,04t} = 60$, $70e^{-0,04t} = 40$, $e^{-0,04t} = \frac{4}{7}$, $-0,04t = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$, soit

$$t = \frac{\ln(7/4)}{0,04} \approx 14 \text{ min.}$$

Comme $t \mapsto e^{-0,04t}$ décroît, T décroît : après 14 min, le thé est sous 60°C . Et $e^{-0,04t} > 0$: $T(t)$ reste au-dessus de 20°C , la température de la pièce.



Température du thé (en bleu) en fonction du temps : elle baisse vite au début, puis de plus en plus lentement, et se rapproche de la droite $T = 20$ (en orange) sans l'atteindre.

Exemple — Le temps de doublement d'une population de bactéries

En laboratoire, dans des conditions idéales, une population de bactéries est modélisée par $N(t) = N_0 e^{0,035t}$, t en minutes. Elle double quand $e^{0,035t} = 2$, soit $0,035t = \ln(2)$:

$$t = \frac{\ln(2)}{0,035} \approx 20 \text{ min.}$$

Avec les propriétés de l'exponentielle : $N(t + 20) = N_0 e^{0,035t} \times e^{0,7} \approx 2 N(t)$. Le doublement prend toujours 20 min, quel que soit l'instant de départ.

Application 10 – Le radon d'un échantillon d'air

Le radon est un gaz radioactif naturel, présent dans les sous-sols. L'air d'une cave est enfermé dans un flacon étanche. L'activité du radon qu'il contient, en becquerels, est modélisée par $A(t) = 600 e^{-0,182t}$, où t est le temps en jours.

- La fonction A est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
- Résoudre $A(t) = 300$. Comparer le résultat à la période du radon, 3,8 jours.
- Quel pourcentage de l'activité de départ reste-t-il au bout de 10 jours ?
- Au bout de combien de jours l'activité est-elle inférieure à 6 Bq, c'est-à-dire à 1 % de l'activité de départ ?

Correction — Application 10

a. $e^{-0,182t} = (e^{-0,182})^t \approx 0,834^t$: base inférieure à 1, donc A est **décroissante**.

b. $600 e^{-0,182t} = 300$, $e^{-0,182t} = 0,5$, $-0,182t = \ln(0,5)$, $t = \frac{\ln(2)}{0,182} \approx 3,8$ jours : c'est la période, le temps au bout duquel l'activité est divisée par deux.

c. $\frac{A(10)}{A(0)} = e^{-1,82} \approx 0,162$: il reste environ 16 % de l'activité.

d. $600 e^{-0,182t} = 6$, $e^{-0,182t} = 0,01$, $t = \frac{\ln(100)}{0,182} \approx 25,3$. Comme A décroît, l'activité est inférieure à 6 Bq à partir de 25,3 jours environ, soit au 26^e jour.

Conduite : au c., le rapport $\frac{A(10)}{A(0)}$ ne dépend pas de l'activité de départ. Faire le lien avec la propriété $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Bilan – Je sais faire**À retenir****ln et exp se défont l'une l'autre**

$$\ln(x) = a \iff x = e^a \qquad \ln(e^a) = a \qquad e^{\ln(x)} = x$$

ln est définie sur $]0; +\infty[$, nulle en 1, de dérivée $\frac{1}{x}$, croissante. $e \approx 2,718$ vérifie $\ln(e) = 1$. $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, croissante ; sa courbe est la symétrique de celle de ln par rapport à la droite $y = x$.

Méthode — Les règles de calcul

Logarithme népérien ($a > 0, b > 0$)	Exponentielle (a, b réels)
$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
$\ln(a^n) = n \ln(a)$	$(e^a)^n = e^{na}$

Et deux passerelles : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ et $q^x = e^{x \ln(q)}$.

Méthode — Choisir sa méthode

Une équation $e^{\dots} = b$: isoler l'exponentielle, puis appliquer $\ln$ (pas de solution si $b \leq 0$).

Une équation $\ln(\dots) = a$: isoler le logarithme, puis passer à e^a .

Une équation $q^x = b$: $x = \frac{\ln(b)}{\ln(q)}$.

Un sens de variation : $\ln$ et $x \mapsto e^x$ croissent ; $t \mapsto e^{-kt}$ (avec $k > 0$) décroît.

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Le nombre dont je prends le logarithme est-il strictement positif ?
2. Une exponentielle ne peut pas être négative ou nulle : mon équation a-t-elle bien une solution ?
3. Ai-je isolé l'exponentielle *avant* d'appliquer $\ln$?
4. En remplaçant ma solution dans l'équation, je retrouve bien la valeur visée ?
5. Dans un modèle, ma réponse a-t-elle une unité et un sens ?

Remarque — Ce que ce chapitre ne demande pas

Les dérivées de $e^{u(x)}$ et de $\ln(u(x))$, la dérivée d'un produit, les limites écrites avec la notation $\lim$, les primitives et les équations différentielles ne font pas partie de ce complément. La dérivée de l'exponentielle n'apparaît qu'en « Aller plus loin ».