

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 8

Calcul intégral

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir dériver une constante, une fonction affine, les fonctions x^2 , x^3 et $\frac{1}{x}$ (chapitre 6 de Première et chapitre 4 de Terminale), calculer une image, y compris pour un nombre négatif, et calculer l'aire d'un rectangle, d'un triangle et d'un trapèze. La calculatrice est autorisée. Ce chapitre relève du programme complémentaire de préparation à une poursuite d'études : il n'est pas évalué à l'épreuve du baccalauréat.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Déterminer les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse d'un tableau des dérivées	§1 Primitive d'une fonction §2 Primitives usuelles	2 él. 2
C2 – Déterminer, avec ou sans outils numériques, les primitives d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un réel	§3 Somme et produit par un réel	4 él. 4
C3 – Calculer l'intégrale, sur un intervalle $[a; b]$, d'une fonction f admettant une primitive F , avec ou sans outils numériques	§4 Intégrale sur $[a; b]$	4 él. 5
C4 – Interpréter l'intégrale d'une fonction définie et positive sur un intervalle $[a; b]$ comme une aire	§5 Intégrale et aire	6 él. 6
C4 et C3 – Approcher une aire par des rectangles, avec un outil numérique	§6 Méthode des rectangles	7 él. 8
C4 – Interpréter une aire dans une situation, avec ses unités	§7 Aire et grandeurs	10 él. 10
Aller plus loin – Valeur moyenne d'une fonction (hors des capacités du complément)	§8 Aller plus loin	11 él. 12

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Les parties se lisent dans l'ordre. On ne cherche de primitive que pour les fonctions obtenues à partir de **constantes**, de x , de x^2 et de $\frac{1}{x^2}$, par sommes et multiples : ce sont celles que donne le tableau des dérivées connu.

1 Primitive d'une fonction (C1)

Jusqu'ici, on partait d'une fonction et on calculait sa dérivée. Ce chapitre fait le chemin **inverse** : on connaît la dérivée, et on cherche la fonction de départ.

Définition — Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } I.$$

Exemple — Reconnaître une primitive

$F(x) = x^2 + 3x$ est une primitive de $f(x) = 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$ car

$$F'(x) = 2x + 3 = f(x).$$

Proposition — Une primitive n'est jamais seule

Si F est une primitive de f sur I , alors, pour tout nombre réel k , la fonction $F + k$ est aussi une primitive de f sur I .

En effet, la dérivée d'une constante est nulle : $(F + k)' = F' + 0 = f$.

Ainsi $x^2 + 3x + 10$ et $x^2 + 3x - 1$ sont, elles aussi, des primitives de $2x + 3$. Quand on demande *une* primitive, on peut donc choisir $k = 0$.

Méthode — Vérifier qu'une fonction est une primitive

On **dérive** la fonction proposée F , puis on compare $F'(x)$ à $f(x)$. S'ils sont égaux pour tout x de l'intervalle, F est une primitive de f ; sinon, elle ne l'est pas.

Erreur fréquente — On dérive F , pas f

Pour vérifier que F est une primitive de f , c'est F qu'il faut dériver. Dériver f donne une autre fonction, qui ne sert à rien ici.

Application 1 – Reconnaître des primitives

On donne $f(x) = 3x^2$.

a. Vérifier que $F(x) = x^3 - 7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Donner deux autres primitives de f .

c. Un élève propose $G(x) = 6x$. Calculer $G'(x)$. G est-elle une primitive de f ? Qu'a fait l'élève ?

Correction — Application 1

a. $F'(x) = 3x^2 - 0 = 3x^2 = f(x)$: F est une primitive de f .

b. Par exemple x^3 et $x^3 + 5$: on ajoute à x^3 n'importe quelle constante.

c. $G'(x) = 6 \neq 3x^2$: G n'est pas une primitive de f . L'élève a **dérivé** f au lieu de chercher une fonction dont la dérivée est f .

Conduite : faire dire « primitive, c'est le chemin inverse de la dérivée » avant de passer au tableau du §2.

2 Le tableau des primitives usuelles (C1)

Chaque ligne du **tableau des dérivées**, lue de droite à gauche, donne une primitive. Par exemple, $(x^3)' = 3x^2$: donc x^3 est une primitive de $3x^2$.

Fonction	k (constante)	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$
Dérivée	0	1	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$

Exemple — Lire le tableau à l'envers

$(x^2)' = 2x$, donc une primitive de $2x$ est x^2 . Pour obtenir une primitive de x , on prend la **moitié** :

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x.$$

De même, $(x^3)' = 3x^2$, donc une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, et $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, donc une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$.

Proposition — Primitives usuelles (à connaître)

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$

Chaque ligne se **vérifie** en dérivant la colonne du milieu.

Erreur fréquente — Primitives n'est pas dériver

Une primitive de x^2 n'est pas $2x$ (c'est sa dérivée) mais $\frac{x^3}{3}$: l'exposant **augmente** de 1, et l'on divise par le nouvel exposant. Et une primitive de 5 est $5x$, pas 0.

Application 2 – Six primitives usuelles

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = 1$ b. $g(x) = 2x$ c. $h(x) = x^2$ d. $k(x) = 8$ e. $m(x) = x$ f. $p(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$
g. Vérifier le résultat du c. en dérivant.

Correction — Application 2

a. x b. x^2 c. $\frac{x^3}{3}$ d. $8x$ e. $\frac{x^2}{2}$ f. $-\frac{1}{x}$

g. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$. ✓

À faire remarquer : toute réponse augmentée d'une constante est juste aussi.

3 Primitive d'une somme, d'un produit par un réel (C2)

Proposition — Deux règles (admises)

Soit F une primitive de f et G une primitive de g sur un intervalle I , et k un nombre réel.

Somme : $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Produit par un réel : $k \times F$ est une primitive de $k \times f$.

Ce sont les règles de dérivation lues à l'envers : on cherche la primitive **terme par terme**, en gardant les coefficients.

Exemple — Une primitive de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

▪ $3x^2 = 3 \times x^2$ donne $3 \times \frac{x^3}{3} = x^3$; ▪ $-4x$ donne $-4 \times \frac{x^2}{2} = -2x^2$; ▪ 5 donne $5x$.

D'où $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. *Vérification :* $F'(x) = 3x^2 - 4x + 5 = f(x)$. ✓

Méthode — Avec un outil numérique

Un logiciel de calcul formel donne une primitive. Dans GeoGebra, la saisie `Intégrale(3x^2-4x+5)` affiche $x^3 - 2x^2 + 5x$; la fenêtre de calcul formel ajoute une constante notée c_1 : c'est le nombre k du §1. Le résultat se **contrôle** toujours en dérivant.

Erreur fréquente — Ne pas oublier le x du terme constant

Une primitive de 5 est $5x$, pas 5 : la dérivée de 5 vaut 0, pas 5. Écrire $x^3 - 2x^2 + 5$ est une erreur que la vérification par dérivation détecte aussitôt.

Application 3 – Des polynômes à primitiver

Déterminer une primitive de chaque fonction, puis vérifier la dernière en dérivant.

a. $f(x) = 6x + 1$ b. $g(x) = x^2 - 2x$ c. $h(x) = -3x^2 + 4x - 7$ d. $k(x) = 0,5x + 2$

e. Un logiciel affiche, pour $m(x) = 4x^2 - 6x + 1$, la primitive $M(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + x$. Vérifier ce résultat.

Correction — Application 3

a. $F(x) = 3x^2 + x$ b. $G(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ c. $H(x) = -x^3 + 2x^2 - 7x$ d. $K(x) = 0,25x^2 + 2x$

e. $M'(x) = \frac{4}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 1 = 4x^2 - 6x + 1 = m(x)$. ✓

Au d. : $0,5 \times \frac{x^2}{2} = 0,25x^2$; l'erreur fréquente est d'écrire $0,5x^2$, dont la dérivée vaut x et non $0,5x$.

4 Intégrale d'une fonction sur un intervalle (C3)

Définition — Intégrale de a à b

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle contenant a et b . L'**intégrale** de f de a à b est le **nombre**

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

On écrit aussi $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Les nombres a et b sont les **bornes** ; le symbole dx indique que la variable est x .

Remarque — Le choix de la primitive ne change pas le résultat

Avec la primitive $F + k$, on obtient $(F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$: la constante disparaît. On prend donc la primitive la plus simple.

Méthode — Calculer une intégrale en trois étapes

1. Chercher une primitive F de f . 2. Écrire $[F(x)]_a^b$. 3. Calculer $F(b)$, puis $F(a)$, puis la différence $F(b) - F(a)$.

Exemple — Deux intégrales

1. $\int_1^3 (2x + 1) \, dx = [x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10.$

2. $\int_{-1}^2 3x^2 \, dx = [x^3]_{-1}^2 = 2^3 - (-1)^3 = 8 - (-1) = 9.$

Erreur fréquente — $F(b) - F(a)$, dans cet ordre et avec des parenthèses

On commence par la borne du **haut**. Quand $F(a)$ est négatif, les parenthèses évitent l'erreur de signe : $8 - (-1) = 9$, et non $8 - 1 = 7$. Et l'on calcule avec F , pas avec f .

Méthode — Contrôler avec un outil numérique

La calculatrice possède une fonction intégrale (symbole $\int$) : on saisit la fonction et les deux bornes. Dans GeoGebra, `Intégrale(2x+1, 1, 3)` affiche 10 et colore le domaine correspondant. L'outil contrôle le résultat ; il ne remplace pas la primitive quand elle est demandée.

Application 4 – Quatre intégrales

Calculer les intégrales suivantes, en écrivant les trois étapes.

a. $\int_0^2 4 \, dx$ b. $\int_1^4 2x \, dx$ c. $\int_0^3 (x^2 + 1) \, dx$ d. $\int_{-2}^1 (2x + 3) \, dx$

e. Contrôler un des résultats à la calculatrice.

Correction — Application 4

a. $[4x]_0^2 = 8 - 0 = 8.$ b. $[x^2]_1^4 = 16 - 1 = 15.$

c. $\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = (9 + 3) - 0 = 12.$

d. $[x^2 + 3x]_{-2}^1 = (1 + 3) - ((-2)^2 + 3 \times (-2)) = 4 - (4 - 6) = 4 - (-2) = 6.$

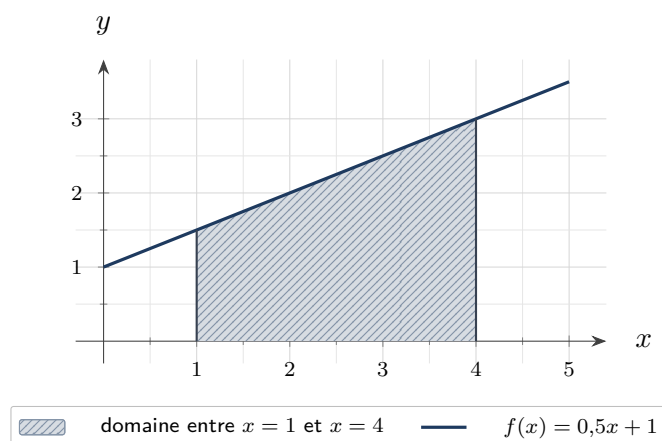
Conduite : au d., faire écrire $F(-2)$ à part, avec ses parenthèses, avant la soustraction. C'est là que se commettent presque toutes les erreurs.

5 L'intégrale d'une fonction positive est une aire (C4)

Proposition — Intégrale et aire (admis)

Si f est **positive** sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle qui mesure une unité sur chaque axe. Si x et y sont en centimètres, $1 \text{ u.a.} = 1 \text{ cm}^2$.



Repère d'unité 1 sur chaque axe. En trait plein, la droite d'équation $y = 0,5x + 1$; en hachuré, le domaine limité par cette droite, l'axe des abscisses et les verticales $x = 1$ et $x = 4$. C'est un trapèze de côtés parallèles $f(1) = 1,5$ et $f(4) = 3$, et de largeur 3.

Exemple — Le calcul intégral retrouve la géométrie

$f(x) = 0,5x + 1$ est positive sur $[1; 4]$ ($f(1) = 1,5$ et $f(4) = 3$, et f est croissante).

Par la géométrie : aire du trapèze $= \frac{(1,5 + 3) \times 3}{2} = 6,75 \text{ u.a.}$

Par l'intégrale : $\int_1^4 (0,5x + 1) dx = [0,25x^2 + x]_1^4 = (4 + 4) - (0,25 + 1) = 8 - 1,25 = 6,75 \text{ u.a.}$

Les deux méthodes donnent la même aire. Mais pour un bord **courbe**, seule l'intégrale donne la valeur exacte.

Erreur fréquente — Vérifier d'abord que f est positive

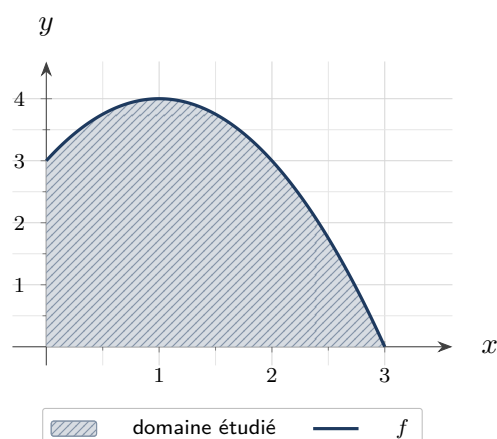
L'interprétation comme aire ne vaut que si f est positive sur tout l'intervalle. Par exemple

$$\int_0^3 (x - 2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^3 = 4,5 - 6 = -1,5.$$

Ce nombre négatif ne peut pas être une aire, car $x - 2$ est négatif sur $[0; 2[$. Ce cas sort du cadre du chapitre.

Application 5 – Une aire sous un arc de parabole

On donne $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, qui s'écrit aussi $f(x) = (3 - x)(x + 1)$.



Repère d'unité 1 sur chaque axe, quadrillage tous les 0,5. En hachuré, le domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, pour x allant de 0 à 3.

- Justifier que f est positive sur $[0 ; 3]$.
- Calculer l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
- Contrôler l'ordre de grandeur en comptant les carreaux du quadrillage.

Correction — Application 5

a. Pour $0 \leq x \leq 3$: $3 - x \geq 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f(x) = (3 - x)(x + 1) \geq 0$.

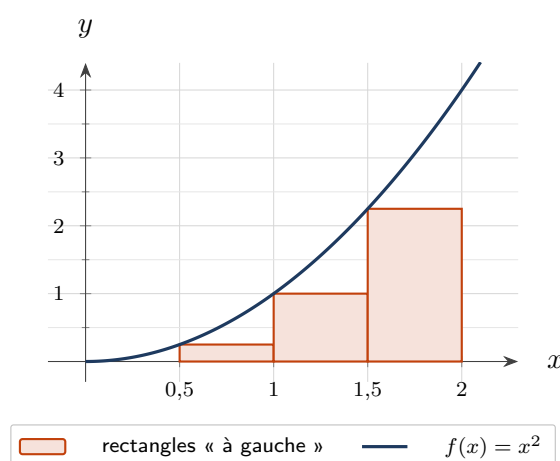
b. $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_0^3 = (-9 + 9 + 9) - 0 = 9 \text{ u.a.}$

c. Un carreau vaut $0,5 \times 0,5 = 0,25 \text{ u.a.}$; le domaine en couvre environ 36, soit environ 9 u.a. ✓

Conduite : le comptage ne donne qu'une estimation ; l'intégrale donne la valeur exacte. C'est l'objet du §6.

6 Approcher une aire par des rectangles (C4 et C3)

Pour estimer l'aire sous une courbe, on la découpe en bandes verticales de même largeur h et l'on remplace chaque bande par un **rectangle**. La somme des aires des rectangles est une **valeur approchée** de l'aire. Plus les rectangles sont nombreux, plus l'approximation est bonne.



Repère d'unité 1 sur chaque axe. Sous la courbe de $f(x) = x^2$, entre 0 et 2 : quatre rectangles de largeur 0,5 ; la hauteur de chacun est la valeur de f au bord **gauche** de sa bande (0 ; 0,25 ; 1 ; 2,25).

Exemple — Quatre rectangles, puis un outil numérique

Somme des aires : $0,5 \times (0 + 0,25 + 1 + 2,25) = 0,5 \times 3,5 = 1,75$ u.a.

Avec les rectangles « à droite » (hauteur au bord droit), on trouve $0,5 \times (0,25 + 1 + 2,25 + 4) = 3,75$ u.a. L'aire est entre les deux.

Un programme fait le même calcul avec beaucoup plus de rectangles :

Nombre de rectangles	4	10	100	1 000
Rectangles à gauche	1,75	2,28	2,626 8	2,662 668
Rectangles à droite	3,75	3,08	2,706 8	2,670 668

Les deux suites se resserrent vers 2,666... Or $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2,667$: les rectangles approchent l'intégrale.

Méthode — Le programme en Python

```

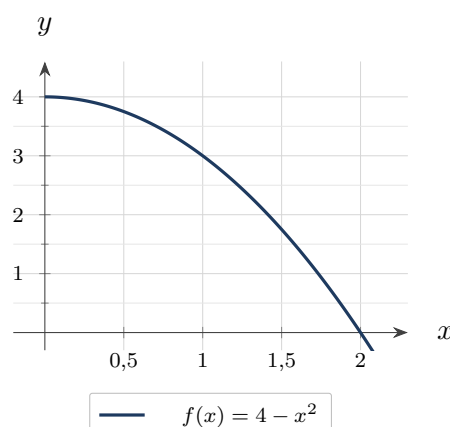
1 def f(x):
2     return x**2
3
4 def rectangles_gauche(a, b, n):
5     h = (b - a) / n # largeur d'un rectangle
6     s = 0
7     for k in range(n):
8         s = s + f(a + k*h) * h
9     return s
10
11 print(rectangles_gauche(0, 2, 100)) # affiche environ 2.6268

```

Un tableur fait le même travail : une colonne pour les bords gauches, une pour $f(x) \times h$, puis une somme.

Application 6 – Encadrer une aire

On donne $f(x) = 4 - x^2$ sur $[0; 2]$, fonction positive et décroissante sur cet intervalle.



Repère d'unité 1 sur chaque axe, graduations tous les 0,5 en abscisse. La courbe de f descend de 4 à 0 entre $x = 0$ et $x = 2$; les rectangles sont à tracer.

- Calculer la somme des aires de quatre rectangles de largeur 0,5 « à gauche », puis « à droite ».
- Calculer $\int_0^2 (4 - x^2) dx$ et vérifier que cette valeur est encadrée par les deux sommes.
- Pourquoi les rectangles « à gauche » donnent-ils ici une valeur trop grande ?

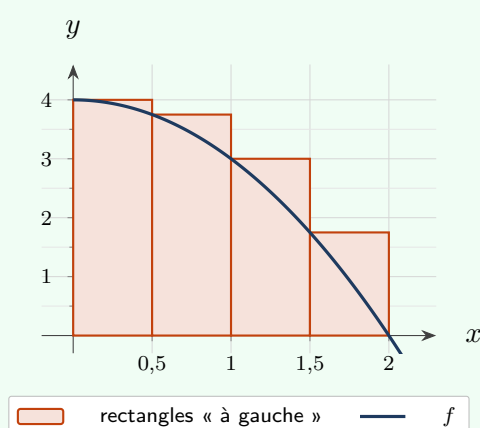
Correction — Application 6

a. $f(0) = 4$, $f(0,5) = 3,75$, $f(1) = 3$, $f(1,5) = 1,75$, $f(2) = 0$.

À gauche : $0,5 \times (4 + 3,75 + 3 + 1,75) = 0,5 \times 12,5 = 6,25$ u.a. À droite : $0,5 \times (3,75 + 3 + 1,75 + 0) = 4,25$ u.a.

b. $\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33$ u.a., et $4,25 < 5,33 < 6,25$. ✓

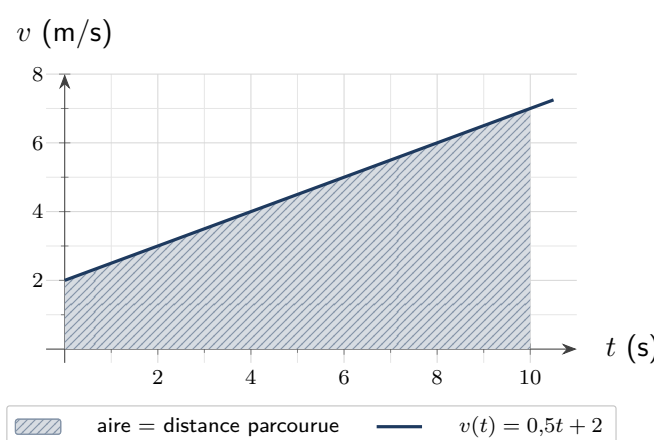
c. f est décroissante : sur chaque bande, la hauteur prise au bord gauche est la plus grande valeur de f . Chaque rectangle dépasse de la courbe.



7 Interpréter une aire dans une situation (C4)

Quand x et $f(x)$ sont des grandeurs avec des unités, l'aire sous la courbe a pour unité le **produit** des deux unités. Le cas le plus simple est celui d'une vitesse constante : à 15 m/s pendant 4 s, on parcourt $15 \times 4 = 60$ m ; c'est l'aire du rectangle de hauteur 15 et de largeur 4 sous le graphique de la vitesse.

Courbe tracée	Unités	L'aire sous la courbe donne
vitesse en fonction du temps	m/s et s	la distance parcourue, en m
puissance en fonction du temps	kW et h	l'énergie, en kWh
débit en fonction du temps	L/min et min	le volume écoulé, en L



Graphique vitesse–temps : le temps t en secondes en abscisse, la vitesse v en mètres par seconde en ordonnée. En hachuré, l'aire sous la droite de $t = 0$ à $t = 10$ s.

Exemple — De la vitesse à la distance

Un cycliste accélère : sa vitesse vaut $v(t) = 0,5t + 2$, en m/s, pendant 10 s. La distance parcourue est l'aire sous la courbe :

$$\int_0^{10} (0,5t + 2) dt = [0,25t^2 + 2t]_0^{10} = 25 + 20 = 45 \text{ m.}$$

Unité : des mètres par seconde multipliés par des secondes donnent des mètres.

Application 7 – L'énergie consommée par un chauffage

Au démarrage d'un appareil de chauffage, sa puissance est modélisée par

$$P(t) = -0,75t^2 + 3t + 1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 4,$$

avec P en kilowatts (kW) et t en heures (h). L'énergie consommée est l'aire sous la courbe de P .

a. Calculer $P(0)$, $P(2)$ et $P(4)$. La puissance est-elle positive sur $[0; 4]$? (On admet que P est croissante puis décroissante, avec son maximum en $t = 2$.)

b. Calculer l'énergie consommée pendant ces 4 heures. Préciser l'unité.

Correction — Application 7

a. $P(0) = 1$ kW, $P(2) = -3 + 6 + 1 = 4$ kW, $P(4) = -12 + 12 + 1 = 1$ kW. P monte de 1 à 4 puis redescend à 1 : elle reste au-dessus de 1, donc positive.

b. $E = \int_0^4 P(t) dt = [-0,25t^3 + 1,5t^2 + t]_0^4 = -16 + 24 + 4 = 12$ kWh.

Des kilowatts multipliés par des heures donnent des **kilowattheures**.

Erreur fréquente : multiplier la puissance maximale par la durée ($4 \times 4 = 16$) ; cela revient à supposer que l'appareil tourne toujours à pleine puissance.

8 Aller plus loin – la valeur moyenne (hors capacités)**Remarque — Aller plus loin – ne fait pas partie des capacités du complément**

La **valeur moyenne** d'une fonction f sur $[a; b]$ est le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Pour une fonction positive, c'est la **hauteur du rectangle** de largeur $b - a$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. À l'application 7, la puissance moyenne vaut $\frac{12}{4} = 3$ kW : un appareil qui tournerait à 3 kW pendant 4 h consommerait la même énergie. Cette notion sera utile en BTS ; elle n'est pas évaluée dans ce chapitre.

Bilan – Je sais faire**À retenir**

Primitive : $F' = f$. On l'obtient en lisant le tableau des dérivées à l'envers, puis terme par terme ; toute primitive $F + k$ convient.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si f est **positive** sur $[a; b]$, ce nombre est l'**aire** sous la courbe, en unités d'aire.

Méthode — Les primitives du chapitre

$f(x)$	k	x	x^2	$\frac{1}{x^2}$
$F(x)$	kx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$-\frac{1}{x}$

Plus deux règles : la primitive d'une somme est la somme des primitives ; celle de $k \times f$ est $k \times F$.

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Ma primitive, une fois dérivée, redonne-t-elle f ? 2. Ai-je calculé $F(b) - F(a)$, dans cet ordre, avec des parenthèses ? 3. Pour une aire : f est-elle positive sur l'intervalle ? Mon résultat est-il positif ?
4. L'ordre de grandeur est-il cohérent avec la figure (carreaux, rectangles) ? 5. Ai-je donné l'unité (u.a., cm^2 , m, kWh...) ?

Remarque — Ce que ce chapitre ne demande pas

Les primitives de x^3 et des puissances plus élevées, de $\frac{1}{x}$, de l'exponentielle ou des fonctions trigonométriques ne sont pas au programme de ce complément. On n'y calcule pas d'aire pour une fonction qui change de signe, ni d'aire entre deux courbes, ni de volume.