

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 8****Calcul intégral**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les quatre capacités du chapitre, dans l'ordre du cours. Dans chaque capacité, les premiers exercices sont guidés, les suivants demandent plus d'autonomie, et le dernier fait contrôler un résultat ou repérer une erreur. Écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec son unité quand la grandeur en a une. La calculatrice est autorisée ; elle sert aussi à contrôler. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Déterminer les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse d'un tableau des dérivées	1 à 5	2
C2 – Déterminer, avec ou sans outils numériques, les primitives d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un réel	6 à 11	4
C3 – Calculer l'intégrale, sur un intervalle $[a ; b]$, d'une fonction f admettant une primitive F , avec ou sans outils numériques	12 à 18	6
C4 – Interpréter l'intégrale d'une fonction définie et positive sur un intervalle $[a ; b]$ comme une aire	19 à 25	9
Aller plus loin – La valeur moyenne d'une fonction (hors des capacités du complément)	26	15

Ce chapitre relève du programme complémentaire de préparation à une poursuite d'études. On n'y cherche de primitive que pour des sommes et des multiples de constantes, de x , de x^2 et de $\frac{1}{x^2}$; on n'y interprète comme une aire que l'intégrale d'une fonction positive.

C1 – Déterminer les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse d'un tableau des dérivées

Exigible dans le complément. Prérequis : dérivées de k , x , x^2 , x^3 et $\frac{1}{x}$.

Rappel de cours

Une **primitive** de f sur un intervalle est une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$. On la trouve en lisant le tableau des dérivées **à l'envers** :

$f(x)$	k	x	x^2	$\frac{1}{x^2}$ (pour $x > 0$)
une primitive $F(x)$	kx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$-\frac{1}{x}$

Si F est une primitive de f , alors $F + k$ en est une autre, pour toute constante k . Pour vérifier, on **dérive** F et l'on compare à f .

Exercice 1 — Lire le tableau des dérivées à l'envers

Compléter chaque phrase à l'aide de la dérivée donnée.

- $(x^2)' = 2x$, donc une primitive de $2x$ est
- $(x^3)' = 3x^2$, donc une primitive de $3x^2$ est
- $(x)' = 1$, donc une primitive de 1 est
- $(5x)' = 5$, donc une primitive de 5 est
- $(7)' = 0$, donc 7 est une primitive de la fonction
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, donc une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ est

Correction de l'exercice 1

- a. x^2 b. x^3 c. x d. $5x$ e. la fonction nulle, $f(x) = 0$ f. $\frac{1}{x}$

À faire dire : on lit chaque égalité de droite à gauche. Au e., toute constante est une primitive de la fonction nulle.

Exercice 2 — Est-ce une primitive ?

Dans chaque cas, calculer $F'(x)$, puis dire si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- $F(x) = x^3 + 4$ et $f(x) = 3x^2$
- $F(x) = x^2 - 9$ et $f(x) = 2x$
- $F(x) = 2x$ et $f(x) = x^2$
- $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ et $f(x) = x^2$
- $F(x) = 5x - 2$ et $f(x) = 5$

Correction de l'exercice 2

- $F'(x) = 3x^2 = f(x)$: oui.
- $F'(x) = 2x = f(x)$: oui.
- $F'(x) = 2 \neq x^2$: non.
- $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$: oui.
- $F'(x) = 5 = f(x)$: oui.

Remarque : les constantes $+4$, -9 , $+1$ et -2 ne changent rien, puisque leur dérivée est nulle.

Exercice 3 — Six fonctions usuelles

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

- $f(x) = 6$
- $g(x) = x$
- $h(x) = x^2$
- $k(x) = -2$
- $m(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$
- $p(x) = 0$

Correction de l'exercice 3

- a. $6x$ b. $\frac{x^2}{2}$ c. $\frac{x^3}{3}$ d. $-2x$ e. $-\frac{1}{x}$ f. n'importe quelle constante, par exemple 0 ou 3.

Contrôle : chaque réponse, dérivée, redonne la fonction de départ ; par exemple $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

Exercice 4 — Une infinité de primitives

On donne $f(x) = 2x$.

- a. Montrer que $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 5$ et $F_3(x) = x^2 - 1,5$ sont trois primitives de f sur $\mathbb{R}$.
 b. Calculer $F_1(0)$, $F_2(0)$ et $F_3(0)$.
 c. Donner la primitive G de f telle que $G(0) = 10$.

Correction de l'exercice 4

- a. $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 2x = f(x)$: la constante ajoutée a une dérivée nulle.
 b. $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 5$, $F_3(0) = -1,5$.
 c. $G(x) = x^2 + k$ et $G(0) = k$; il faut $k = 10$, donc $G(x) = x^2 + 10$.

À faire remarquer : les primitives de f ne diffèrent que par la constante ; une condition comme $G(0) = 10$ en choisit une.

Exercice 5 — Samir s'est trompé

Samir écrit : « Une primitive de x^2 est $2x$, et une primitive de 3 est 0. »

- a. Dériver $2x$, puis 0. Qu'a fait Samir ?
 b. Corriger ses deux réponses et les vérifier en dérivant.

Correction de l'exercice 5

- a. $(2x)' = 2$, qui n'est pas x^2 ; $(0)' = 0$, qui n'est pas 3. Samir a **dérivé** les fonctions au lieu de chercher des primitives.
 b. Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, car $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Une primitive de 3 est $3x$, car $(3x)' = 3$.

C2 – Déterminer, avec ou sans outils numériques, les primitives d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un réel

Exigible dans le complément. Prérequis : C1.

Rappel de cours

Somme : une primitive de $f + g$ est $F + G$. **Produit par un réel** : une primitive de $k \times f$ est $k \times F$.

On travaille **terme par terme** en gardant les coefficients : par exemple, $6x$ donne $6 \times \frac{x^2}{2} = 3x^2$, et 5 donne $5x$.

Un logiciel de calcul formel (GeoGebra : Intégrale(f)) donne une primitive, parfois suivie d'une constante c_1 . On vérifie toujours en dérivant.

Exercice 6 — Un coefficient devant la fonction

Compléter.

- Une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$, donc une primitive de $5x$ est $5 \times \frac{x^2}{2} = \dots\dots\dots$
- Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, donc une primitive de $6x^2$ est $\dots\dots\dots$
- Une primitive de $-4x$ est $\dots\dots\dots$
- Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ est $-\frac{1}{x}$, donc une primitive de $\frac{3}{x^2}$ est $\dots\dots\dots$

Correction de l'exercice 6

a. $\frac{5x^2}{2} = 2,5x^2$ b. $6 \times \frac{x^3}{3} = 2x^3$ c. $-4 \times \frac{x^2}{2} = -2x^2$ d. $3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

Contrôle : $(2,5x^2)' = 5x$, $(2x^3)' = 6x^2$, $(-2x^2)' = -4x$ et $\left(-\frac{3}{x}\right)' = \frac{3}{x^2}$.

Exercice 7 — Une somme, terme par terme

Pour chaque fonction, écrire une primitive de chaque terme, puis une primitive de la fonction.

a. $f(x) = 2x + 7$ b. $g(x) = x^2 + x$ c. $h(x) = 3x^2 - 1$

Correction de l'exercice 7

a. $2x$ donne x^2 , 7 donne $7x$: $F(x) = x^2 + 7x$.

b. x^2 donne $\frac{x^3}{3}$, x donne $\frac{x^2}{2}$: $G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$.

c. $3x^2$ donne x^3 , -1 donne $-x$: $H(x) = x^3 - x$.

Exercice 8 — Cinq primitives de polynômes

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = 6x^2 + 2x - 5$ b. $g(x) = -x^2 + 4x$ c. $h(x) = 0,3x^2 + 0,4x$

d. $k(x) = 9 - 2x$ e. $m(x) = \frac{x^2}{2} - 3$

Correction de l'exercice 8

a. $F(x) = 2x^3 + x^2 - 5x$ b. $G(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$ c. $H(x) = 0,1x^3 + 0,2x^2$

d. $K(x) = 9x - x^2$ e. $M(x) = \frac{x^3}{6} - 3x$

Au c. : $0,3 \times \frac{x^3}{3} = 0,1x^3$ et $0,4 \times \frac{x^2}{2} = 0,2x^2$. Au e. : $\frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$.

Exercice 9 — Ce qu'affiche un logiciel

Dans la fenêtre de calcul formel de GeoGebra, la saisie Intégrale($12x^2-6x+2$) affiche le résultat $4x^3 - 3x^2 + 2x + c_1$.

a. Vérifier par dérivation que $4x^3 - 3x^2 + 2x$ est une primitive de $12x^2 - 6x + 2$.

b. Que représente c_1 ?

c. Léa trouve $4x^3 - 3x^2 + 2x - 8$. A-t-elle faux ? Justifier.

Correction de l'exercice 9

a. $(4x^3 - 3x^2 + 2x)' = 12x^2 - 6x + 2$. ✓

b. c_1 est une constante quelconque : c'est le nombre k de la propriété « si F est une primitive, $F + k$ aussi ».

c. Non : c'est la primitive obtenue pour $c_1 = -8$; sa dérivée est encore $12x^2 - 6x + 2$.

Exercice 10 — La trottinette électrique

Une trottinette électrique démarre. Sa vitesse, en mètres par seconde, est modélisée par $v(t) = 0,3t + 1$, pour t compris entre 0 et 15 secondes. La distance $d(t)$ parcourue depuis le départ, en mètres, est la primitive de v qui vaut 0 pour $t = 0$.

a. Donner une primitive de v , puis écrire les primitives de la forme $F(t) + k$.

b. Déterminer k pour que la primitive vaille 0 en $t = 0$. En déduire $d(t)$.

c. Calculer la vitesse atteinte et la distance parcourue au bout de 15 s.

Correction de l'exercice 10

a. $F(t) = 0,15t^2 + t$; les primitives $0,15t^2 + t + k$ conviennent aussi.

b. En $t = 0$, la primitive vaut k ; il faut $k = 0$. Donc $d(t) = 0,15t^2 + t$.

c. $v(15) = 4,5 + 1 = 5,5$ m/s, soit environ 19,8 km/h. $d(15) = 0,15 \times 225 + 15 = 33,75 + 15 = 48,75$ m.

Erreur fréquente : calculer $v(15) \times 15 = 82,5$ m, comme si la trottinette avait roulé tout le temps à sa vitesse finale.

Exercice 11 — Inès a recopié deux termes

Pour $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$, Inès propose $F(x) = x^3 + 4x + 2$.

a. Calculer $F'(x)$. F est-elle une primitive de f ?

b. Repérer les deux termes mal traités, puis donner une primitive correcte.

Correction de l'exercice 11

a. $F'(x) = 3x^2 + 4 \neq f(x)$: F n'est pas une primitive de f .

b. Inès a recopié $4x$ et 2 . Or une primitive de $4x$ est $4 \times \frac{x^2}{2} = 2x^2$, et une primitive de 2 est $2x$. Une primitive correcte est $x^3 + 2x^2 + 2x$; sa dérivée vaut bien $3x^2 + 4x + 2$.

C3 – Calculer l'intégrale, sur un intervalle $[a; b]$, d'une fonction f admettant une primitive F , avec ou sans outils numériques

Exigible dans le complément. Prérequis : C1, C2, calcul d'une image.

Rappel de cours

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

1. Chercher une primitive F .
2. Calculer $F(b)$ puis $F(a)$, avec des parenthèses si un nombre est négatif.
3. Faire la différence $F(b) - F(a)$, dans cet ordre.

La constante k d'une primitive disparaît dans la différence : on prend la primitive la plus simple. La calculatrice (fonction $\int$) ou GeoGebra (Intégrale(f , a , b)) permet de contrôler le résultat.

Exercice 12 — Pas à pas

- a. Calculer $\int_2^5 2x \, dx$ en complétant.

Une primitive de $2x$ est $F(x) = \dots\dots\dots$

$F(5) = \dots\dots\dots$ $F(2) = \dots\dots\dots$

$$\int_2^5 2x \, dx = F(5) - F(2) = \dots\dots\dots$$

- b. Même travail pour $\int_0^3 3x^2 \, dx$.

Correction de l'exercice 12

a. $F(x) = x^2$; $F(5) = 25$; $F(2) = 4$; $\int_2^5 2x \, dx = 25 - 4 = \mathbf{21}$.

b. $F(x) = x^3$; $F(3) = 27$; $F(0) = 0$; $\int_0^3 3x^2 \, dx = 27 - 0 = \mathbf{27}$.

Exercice 13 — Quatre intégrales

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_1^6 3 \, dx$ b. $\int_0^4 x \, dx$ c. $\int_0^3 x^2 \, dx$ d. $\int_2^4 (3x - 1) \, dx$

Correction de l'exercice 13

a. $[3x]_1^6 = 18 - 3 = \mathbf{15}$ b. $\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = \mathbf{8}$ c. $\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9 - 0 = \mathbf{9}$

d. $[1,5x^2 - x]_2^4 = (24 - 4) - (6 - 2) = 20 - 4 = \mathbf{16}$.

Exercice 14 — Avec des polynômes

Calculer les intégrales suivantes. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centième si elle n'est pas entière.

a. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4) \, dx$ b. $\int_1^3 (x^2 - 1) \, dx$ c. $\int_{-1}^1 (x^2 + 2) \, dx$

Correction de l'exercice 14

- a. $[x^3 - x^2 + 4x]_0^2 = (8 - 4 + 8) - 0 = 12$.
- b. $\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,67$.
- c. $\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{14}{3} \approx 4,67$.

Exercice 15 — Le choix de la primitive

On veut calculer $\int_2^4 x^2 dx$.

- a. Faire le calcul avec la primitive $F(x) = \frac{x^3}{3}$.
- b. Refaire le calcul avec la primitive $G(x) = \frac{x^3}{3} + 10$.
- c. Que constate-t-on ? Expliquer.

Correction de l'exercice 15

- a. $F(4) - F(2) = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} \approx 18,67$.
- b. $G(4) - G(2) = \left(\frac{64}{3} + 10\right) - \left(\frac{8}{3} + 10\right) = \frac{56}{3}$.
- c. Le résultat est le même : la constante 10 apparaît deux fois et disparaît dans la soustraction. On peut donc toujours prendre la primitive la plus simple.

Exercice 16 — Ce qu'affiche la calculatrice

La calculatrice affiche $\int_1^4 (0,5x^2 + 1) dx = 13,5$.

- a. Retrouver ce résultat par le calcul.
- b. Un camarade a saisi les bornes dans l'autre ordre, de 4 à 1, et obtient $-13,5$. Expliquer ce résultat à l'aide de la définition de l'intégrale.

Correction de l'exercice 16

- a. Une primitive est $F(x) = \frac{x^3}{6} + x$. $F(4) = \frac{64}{6} + 4 = \frac{44}{3}$ et $F(1) = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$, donc $\frac{44}{3} - \frac{7}{6} = \frac{88 - 7}{6} = \frac{81}{6} = 13,5$. ✓
- b. De 4 à 1, la définition donne $F(1) - F(4) = \frac{7}{6} - \frac{44}{3} = -13,5$: échanger les bornes change le signe du résultat.

Exercice 17 — Avec la fonction $x \mapsto 1/x^2$

Calculer les intégrales suivantes.

- a. $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$ b. $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx$

Correction de l'exercice 17

a. $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -0,25 + 1 = \mathbf{0,75}.$

b. $\left[-\frac{3}{x}\right]_1^2 = -\frac{3}{2} - (-3) = -1,5 + 3 = \mathbf{1,5}.$

Erreur fréquente : oublier le signe moins de la primitive $-\frac{1}{x}$ et trouver un résultat négatif.

Exercice 18 — Deux erreurs à repérer

On veut calculer $I = \int_{-2}^1 (3x^2 + 2x) dx$, avec la primitive $F(x) = x^3 + x^2$.

Nora écrit : « $F(-2) = 8 + 4 = 12$, donc $I = F(1) - F(-2) = 2 - 12 = -10$. »

Hugo écrit : « $I = f(1) - f(-2) = 5 - 8 = -3$. »

- a. Quelle erreur chacun a-t-il commise ?
b. Calculer I correctement.

Correction de l'exercice 18

a. Nora : $(-2)^3 = -8$ et non 8 ; donc $F(-2) = -8 + 4 = -4$. Hugo : il a calculé avec la fonction f au lieu de sa primitive F .

b. $F(1) = 1 + 1 = 2$ et $F(-2) = -8 + 4 = -4$, donc $I = 2 - (-4) = \mathbf{6}$.

C4 – Interpréter l'intégrale d'une fonction définie et positive sur un intervalle $[a; b]$ comme une aire

Exigible dans le complément. Prérequis : C3, aires du rectangle, du triangle et du trapèze.

Rappel de cours

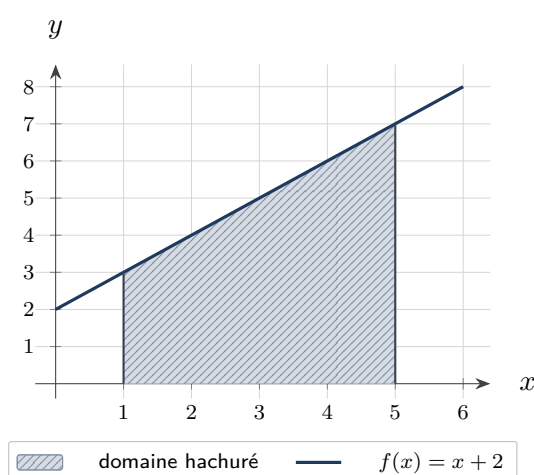
Si f est **positive** sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire**, en unités d'aire (u.a.), du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les verticales $x = a$ et $x = b$. On vérifie donc d'abord le signe de f .

En situation, l'unité de l'aire est le produit des unités des deux axes : m/s $\times$ s donne des m, kW $\times$ h donne des kWh, dm $\times$ dm donne des dm².

Des rectangles de même largeur donnent une valeur approchée de l'aire ; un tableur ou un programme en utilise beaucoup pour s'approcher de l'intégrale.

Exercice 19 — Un trapèze, deux méthodes

On donne $f(x) = x + 2$.



Repère d'unité 1 sur chaque axe. En trait plein, la droite d'équation $y = x + 2$; en hachuré, le domaine limité par cette droite, l'axe des abscisses et les verticales $x = 1$ et $x = 5$.

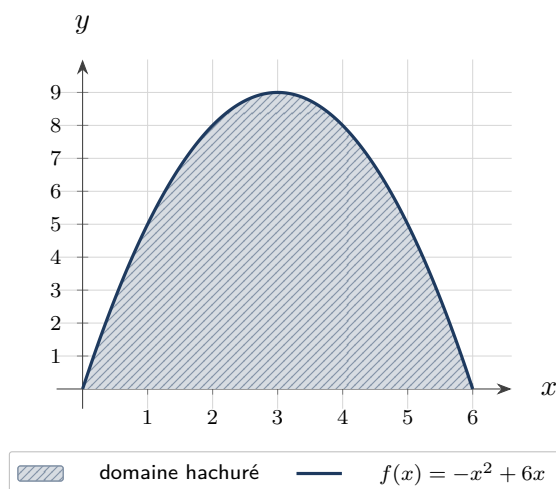
- Justifier que f est positive sur $[1; 5]$.
- Calculer $f(1)$ et $f(5)$, puis l'aire du trapèze hachuré avec la formule $\frac{(B + b) \times h}{2}$.
- Calculer $\int_1^5 (x + 2) dx$ et comparer.

Correction de l'exercice 19

- Pour $x \geq 1$, $x + 2 \geq 3 > 0$: f est positive sur $[1; 5]$.
- $f(1) = 3$ et $f(5) = 7$. Aire = $\frac{(7 + 3) \times 4}{2} = 20$ u.a.
- $\left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^5 = (12,5 + 10) - (0,5 + 2) = 22,5 - 2,5 = 20$ u.a. : les deux méthodes concordent.

Exercice 20 — *Sous un arc de parabole*

On donne $f(x) = -x^2 + 6x$.



Repère d'unité 1 sur chaque axe. En hachuré, le domaine limité par la courbe de f et l'axe des abscisses, entre $x = 0$ et $x = 6$; la courbe monte jusqu'à 9 en $x = 3$.

- Vérifier que $f(x) = x(6 - x)$, puis en déduire que f est positive sur $[0 ; 6]$.
- Calculer l'aire du domaine hachuré.
- Le rectangle de base $[0 ; 6]$ et de hauteur $f(3)$ a pour aire 54 u.a. Quelle fraction de ce rectangle le domaine occupe-t-il ?

Correction de l'exercice 20

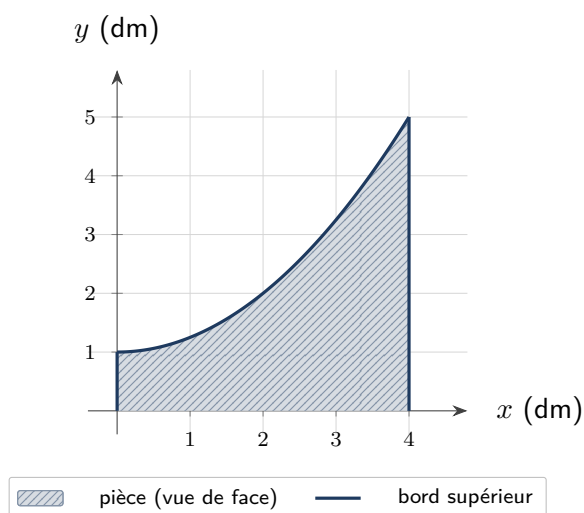
a. $x(6 - x) = 6x - x^2 = f(x)$. Sur $[0 ; 6]$, $x \geq 0$ et $6 - x \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$.

b. $\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^6 = (-72 + 108) - 0 = 36$ u.a.

c. $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$: le domaine occupe les deux tiers du rectangle, comme pour tout arc de parabole de ce type (résultat déjà connu d'Archimède).

Exercice 21 — Une pièce de contreplaqué

Une pièce est découpée dans un panneau de contreplaqué. Vue de face, elle est limitée par l'axe des abscisses, les verticales $x = 0$ et $x = 4$ et la courbe de $f(x) = 0,25x^2 + 1$, les longueurs étant en décimètres.



Vue de face de la pièce, dans un repère gradué en décimètres. Bord inférieur sur l'axe des abscisses, bords verticaux en $x = 0$ et $x = 4$; le bord supérieur suit la courbe d'équation $y = 0,25x^2 + 1$.

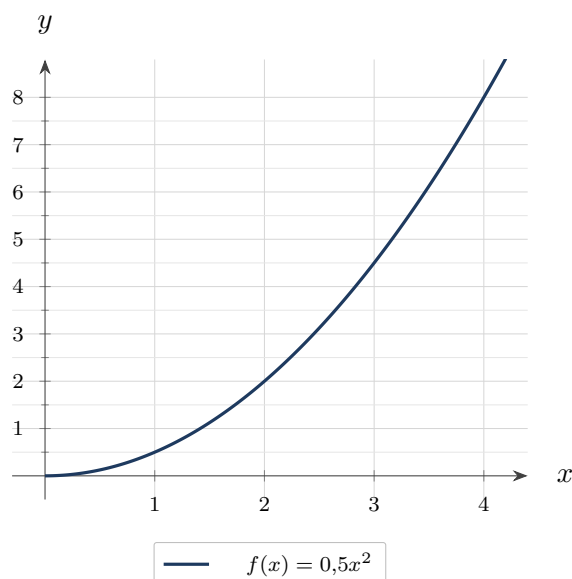
- Calculer la hauteur de la pièce à gauche ($x = 0$) et à droite ($x = 4$).
- Calculer l'aire de la pièce en dm^2 , puis en cm^2 .
- Contrôler : l'aire est-elle comprise entre celle d'un rectangle de 4 dm sur 1 dm et celle d'un rectangle de 4 dm sur 5 dm ?

Correction de l'exercice 21

- $f(0) = 1 \text{ dm}$ et $f(4) = 0,25 \times 16 + 1 = 5 \text{ dm}$.
- f est positive, donc l'aire vaut $\int_0^4 (0,25x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{12} + x \right]_0^4 = \frac{64}{12} + 4 = \frac{28}{3} \approx 9,33 \text{ dm}^2$, soit environ 933 cm^2 ($1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$).
- $4 \times 1 = 4$ et $4 \times 5 = 20$: on a bien $4 < 9,33 < 20$. ✓

Exercice 22 — Des rectangles au tableur

On donne $f(x) = 0,5x^2$, positive et croissante sur $[0; 4]$.

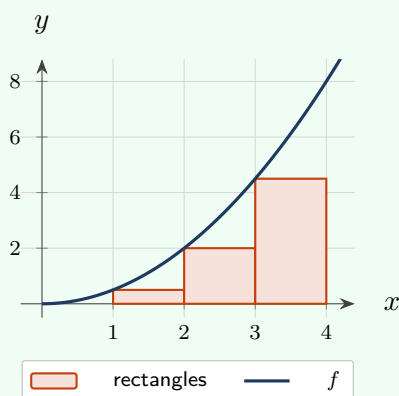


Repère d'unité 1 sur chaque axe. La courbe de f monte de 0 à 8 entre $x = 0$ et $x = 4$; les rectangles sont à tracer.

- Tracer quatre rectangles de largeur 1 « à gauche » et calculer la somme de leurs aires.
- Un tableur donne, avec davantage de rectangles « à gauche » : 9,12 pour 10 rectangles, 10,507 2 pour 100 et 10,650 672 pour 1 000. Vers quelle valeur ces sommes semblent-elles se diriger ?
- Calculer $\int_0^4 0,5x^2 dx$ et conclure.
- Pourquoi les rectangles « à gauche » donnent-ils ici une valeur trop petite ?

Correction de l'exercice 22

- $1 \times (f(0) + f(1) + f(2) + f(3)) = 0 + 0,5 + 2 + 4,5 = 7$ u.a.
- Les sommes augmentent et semblent se diriger vers 10,66...
- $\left[\frac{x^3}{6} \right]_0^4 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} \approx 10,67$ u.a. : les sommes du tableur approchent l'intégrale.
- f est croissante : sur chaque bande, la hauteur prise au bord gauche est la plus petite valeur de f . Chaque rectangle reste sous la courbe.



Exercice 23 — La montée d'un drone

Un drone décolle verticalement. Sa vitesse de montée, en mètres par seconde, est modélisée par $v(t) = -0,24t^2 + 2,4t$, pour t compris entre 0 et 10 secondes. L'altitude gagnée est égale à l'aire sous la courbe de v .

- Calculer $v(0)$, $v(5)$ et $v(10)$. Interpréter.
- Vérifier que $v(t) = 0,24t(10 - t)$, puis justifier que v est positive sur $[0 ; 10]$.
- Calculer l'altitude atteinte au bout de 10 s. Préciser l'unité.

Correction de l'exercice 23

- $v(0) = 0$: départ à l'arrêt. $v(5) = -6 + 12 = 6$ m/s : vitesse de montée la plus grande. $v(10) = -24 + 24 = 0$: le drone ne monte plus, il se stabilise.
- $0,24t(10 - t) = 2,4t - 0,24t^2 = v(t)$. Sur $[0 ; 10]$, $t \geq 0$ et $10 - t \geq 0$, donc $v(t) \geq 0$.
- $\int_0^{10} v(t) dt = [-0,08t^3 + 1,2t^2]_0^{10} = -80 + 120 = 40$ m. Des m/s multipliés par des s donnent des mètres.

Exercice 24 — L'énergie d'un chauffage d'atelier

La puissance d'un chauffage d'atelier au cours d'une matinée est modélisée par $P(t) = -0,5t^2 + 3t + 2$, en kilowatts, pour t compris entre 0 et 6 heures.

- Compléter le tableau de valeurs.

t (h)	0	1	2	3	4	5	6
$P(t)$ (kW)	2			6,5			

- Calculer $P'(t)$ et en déduire que la puissance est toujours au moins égale à 2 kW sur $[0 ; 6]$.
- Calculer l'énergie consommée $E = \int_0^6 P(t) dt$, en kilowattheures.
- Un collègue estime l'énergie en multipliant la puissance maximale par la durée. Quel résultat obtient-il ? Pourquoi est-il trop grand ?

Correction de l'exercice 24

- $P(1) = 4,5$; $P(2) = 6$; $P(4) = 6$; $P(5) = 4,5$; $P(6) = 2$ (en kW).
- $P'(t) = -t + 3$: positive sur $[0 ; 3]$, négative sur $[3 ; 6]$. P croît de 2 à 6,5 puis décroît jusqu'à 2 : elle reste supérieure ou égale à 2 kW, donc positive.
- $E = \left[-\frac{t^3}{6} + 1,5t^2 + 2t \right]_0^6 = -36 + 54 + 12 = 30$ kWh.
- $6,5 \times 6 = 39$ kWh, soit 9 kWh de trop : la puissance maximale n'est atteinte qu'à $t = 3$ h ; le reste du temps, elle est plus faible.

Exercice 25 — Une aire négative ?

Tom calcule $\int_0^5 (x - 3) dx = -2,5$ et conclut : « le domaine sous la courbe de $f(x) = x - 3$, entre 0 et 5, a une aire de $-2,5$ u.a. »

- Refaire le calcul de l'intégrale.
- Étudier le signe de $x - 3$ sur $[0 ; 5]$. Pourquoi la conclusion de Tom est-elle fausse ?
- Calculer $\int_3^5 (x - 3) dx$. Pourquoi ce nombre est-il une aire ? Le vérifier avec l'aire d'un triangle.

Correction de l'exercice 25

a. $\left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^5 = 12,5 - 15 = -2,5$: le calcul est juste.

b. $x - 3 < 0$ pour $x < 3$ et $x - 3 > 0$ pour $x > 3$. La fonction n'est pas positive sur $[0; 5]$: l'intégrale ne s'interprète pas comme une aire. D'ailleurs une aire n'est jamais négative.

c. $\left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^5 = (12,5 - 15) - (4,5 - 9) = -2,5 + 4,5 = 2$. Sur $[3; 5]$, $x - 3 \geq 0$: c'est une aire. Le domaine est un triangle de base 2 et de hauteur $f(5) = 2$: $\frac{2 \times 2}{2} = 2$ u.a. ✓

Aller plus loin

Hors des capacités du complément : pour les élèves qui préparent un BTS. Rien de ce qui suit n'est évalué.

Exercice 26 — La hauteur moyenne d'une arche

Aller plus loin – hors des capacités du chapitre. La **valeur moyenne** d'une fonction f sur $[a; b]$ est

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

- a. Calculer la valeur moyenne de $f(x) = -x^2 + 6x$ sur $[0; 6]$ (voir l'exercice 20).
- b. Tracer, sur la figure de l'exercice 20, le rectangle de base $[0; 6]$ et de hauteur μ . Que peut-on dire de son aire ?

Correction de l'exercice 26

a. $\mu = \frac{1}{6-0} \times 36 = 6.$

- b. Le rectangle mesure 6 sur 6 : son aire vaut 36 u.a., exactement l'aire du domaine sous la courbe. La valeur moyenne est la hauteur du rectangle « de même aire ».