

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 7

Trigonométrie

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Il faut savoir placer sur le cercle trigonométrique le point image d'un réel, lire son cosinus et son sinus, connaître les valeurs particulières pour 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ et utiliser les symétries du cercle ; connaître la courbe de la fonction sinus et sa période 2π (Première, chapitre 9). Il faut aussi savoir construire la somme de deux vecteurs et utiliser les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle. La calculatrice est réglée en mode **radian**, sauf indication contraire.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Résoudre les équations de la forme $\cos x = a$ et $\sin x = b$ sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$	§1 et §2	2 él. 2
C2 – Lire, sur la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$, l'amplitude, la période et la phase à l'origine	§3 et §4	4 él. 4
C3 – Résoudre les équations de la forme $\sin(\omega t + \varphi) = c$ sur un intervalle approprié au contexte	§5	8 él. 8
C4 – Établir des liens entre le vecteur de Fresnel d'une tension ou d'une intensité sinusoïdale de la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$ et la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$	§6 et §7	10 él. 10
C5 – Ajouter ou soustraire deux tensions ou intensités sinusoïdales de même fréquence à l'aide de leurs vecteurs de Fresnel	§8 et §9	14 él. 14

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

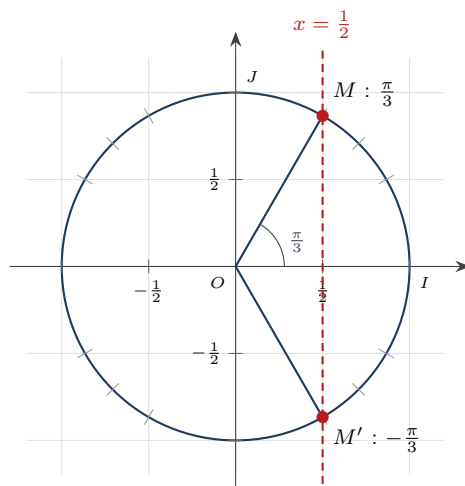
Ce chapitre correspond au module « Trigonométrie » du programme de Terminale, destiné aux spécialités du groupement A. Les parties se lisent dans l'ordre : on résout d'abord des équations sur le cercle, puis on étudie les grandeurs sinusoïdales, et l'on finit par l'outil qui permet de les additionner.

1 L'équation $\cos x = a$ sur $] -\pi ; \pi]$ (C1)

Sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$, chaque point du cercle trigonométrique est l'image d'un **seul** réel : on fait au plus un demi-tour dans chaque sens. Le réel $-\pi$ est exclu, car il a la même image que π .

Définition — Résoudre $\cos x = a$ sur $] -\pi ; \pi]$

C'est trouver tous les réels x de $] -\pi ; \pi]$ dont le point image sur le cercle trigonométrique a pour **abscisse** a . Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$, l'équation n'a **aucune solution** si $a < -1$ ou $a > 1$.



Cercle trigonométrique vu de face, rayon 1. La droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points M et M' , symétriques par rapport à l'axe horizontal : ils sont les images de $\frac{\pi}{3}$ et de $-\frac{\pi}{3}$.

Méthode — Résoudre $\cos x = a$ en trois gestes

1. Si $a < -1$ ou $a > 1$: aucune solution. **2.** Sinon, calculer $x_0 = \arccos(a)$: touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice, en mode radian. On obtient un réel de $[0 ; \pi]$ — ou une valeur particulière connue. **3.** Les solutions sont x_0 et $-x_0$, symétriques par rapport à l'axe horizontal. Cas particuliers : si $a = 1$, une seule solution 0 ; si $a = -1$, une seule solution π .

Exemple — Deux équations résolues

- a.** $\cos x = \frac{1}{2}$: on connaît $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Sur $] -\pi ; \pi]$, les solutions sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.
b. $\cos x = -0,4$: la calculatrice donne $\arccos(-0,4) \approx 1,982$. Les solutions sont $x \approx 1,98$ et $x \approx -1,98$ (au centième). Contrôle : $\cos(1,98) \approx -0,398$.

Erreur fréquente — Une solution juste mais hors de l'intervalle

$\frac{5\pi}{3}$ vérifie bien $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, mais $\frac{5\pi}{3} > \pi$: ce réel n'est pas dans $] -\pi ; \pi]$. Il a la même image que $-\frac{\pi}{3}$, qui est la réponse attendue. L'autre erreur fréquente est d'oublier la seconde solution $-x_0$.

Application 1 – Quatre équations en cosinus

Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$. Donner les valeurs exactes quand c'est possible, sinon des valeurs approchées au centième.

a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\cos x = -\frac{1}{2}$ c. $\cos x = 0,8$ d. $\cos x = 1,2$

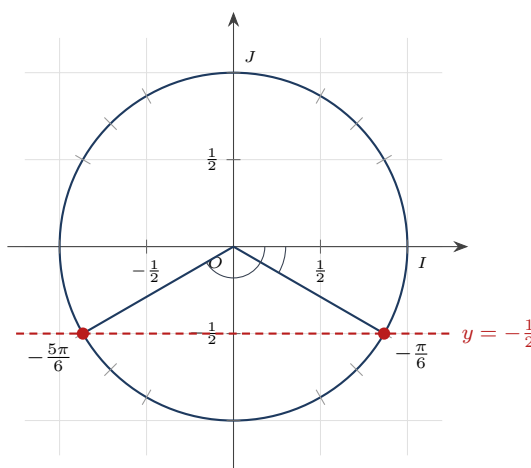
Correction — Application 1

- a. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: solutions $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
 b. $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (symétrique de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe vertical) : solutions $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.
 c. $\arccos(0,8) \approx 0,6435$: solutions $x \approx 0,64$ et $x \approx -0,64$.
 d. $1,2 > 1$: **aucune solution**.

Conduite : faire tracer la droite verticale sur un cercle avant tout calcul. Au b., la calculatrice donne 2,094, qui est $\frac{2\pi}{3}$: le reconnaître se vérifie en divisant par π ($2,094/\pi \approx 0,667$).

2 L'équation $\sin x = b$ sur $] -\pi ; \pi]$ (C1)

Cette fois on cherche les points du cercle d'**ordonnée** b : on trace la droite **horizontale** d'ordonnée b . Les deux points obtenus sont symétriques par rapport à l'axe **vertical**.



Cercle trigonométrique vu de face. La droite horizontale d'ordonnée $-\frac{1}{2}$ coupe le cercle sous l'axe horizontal, en deux points symétriques par rapport à l'axe vertical : ils sont les images de $-\frac{\pi}{6}$ et de $-\frac{5\pi}{6}$, deux angles parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre.

Méthode — Résoudre $\sin x = b$ en trois gestes

1. Si $b < -1$ ou $b > 1$: aucune solution. 2. Sinon, calculer $x_1 = \arcsin(b)$: touche $\sin^{-1}$, en mode radian. On obtient un réel de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$. 3. La seconde solution est le symétrique par rapport à l'axe vertical :

$$x_2 = \pi - x_1 \quad \text{si } b \geq 0 \qquad x_2 = -\pi - x_1 \quad \text{si } b < 0$$

Cas particuliers : $b = 1$ donne seulement $\frac{\pi}{2}$; $b = -1$ donne seulement $-\frac{\pi}{2}$; $b = 0$ donne 0 et π .

Exemple — Deux équations résolues

- a. $\sin x = -\frac{1}{2}$: $x_1 = -\frac{\pi}{6}$. Comme $b < 0$, $x_2 = -\pi - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{5\pi}{6}$. Solutions : $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.
 b. $\sin x = 0,6$: $x_1 = \arcsin(0,6) \approx 0,6435$. Comme $b \geq 0$, $x_2 = \pi - 0,6435 \approx 2,4981$. Solutions : $x \approx 0,64$ et $x \approx 2,50$. Contrôle : $\sin(2,50) \approx 0,598$.

Erreur fréquente — $\pi - x_1$ ne convient pas quand b est négatif

Pour $\sin x = -\frac{1}{2}$, le réel $\pi - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{7\pi}{6}$ est bien une solution, mais il dépasse π . Dans $] -\pi ; \pi]$, on prend son équivalent $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$: c'est la formule $-\pi - x_1$.

Application 2 – Quatre équations en sinus

Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$; valeurs exactes si possible, sinon au centième.

a. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\sin x = -0,3$ d. $\sin x = -1$

Correction — Application 2

- a. $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $b \geq 0$ donc $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Solutions $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
 b. $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $b < 0$ donc $x_2 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$. Solutions $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.
 c. $x_1 = \arcsin(-0,3) \approx -0,3047$; $x_2 = -\pi + 0,3047 \approx -2,8369$. Solutions $x \approx -0,30$ et $x \approx -2,84$.
 d. Cas particulier : une seule solution, $-\frac{\pi}{2}$.

Conduite : au b. et au c., faire placer les deux points sous l'axe horizontal avant d'écrire la formule ; l'erreur visée est $x_2 = \pi - x_1$, qui sort de l'intervalle.

3 Grandeur sinusoïdale : amplitude et période (C2)

En électricité, une tension ou une intensité alternative varie au cours du temps comme la fonction sinus, étirée et décalée. On note t le temps, en secondes.

Définition — Grandeur sinusoïdale

Une grandeur sinusoïdale s'écrit

$$u(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

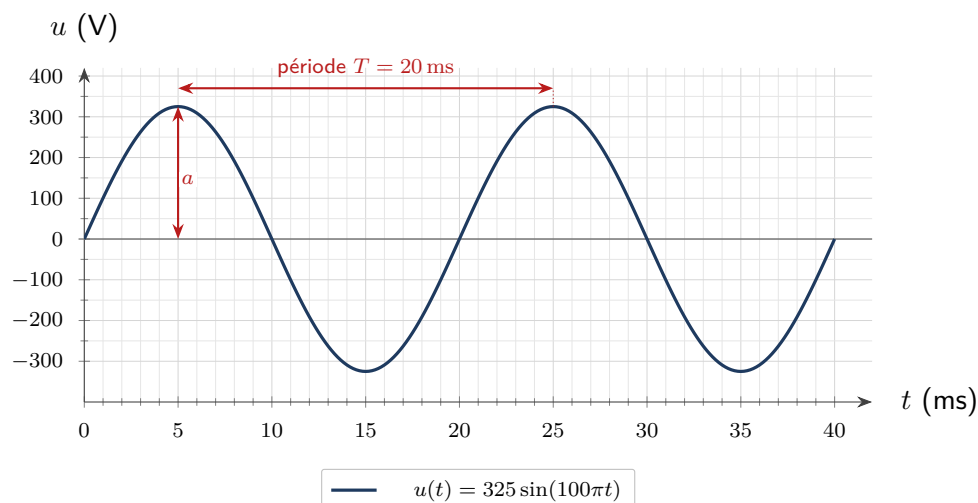
où $a > 0$ est l'**amplitude** (la valeur maximale), $\omega > 0$ la **pulsation**, en radians par seconde (rad/s), et φ la **phase à l'origine**, en radians, prise dans $] -\pi ; \pi]$. La grandeur varie entre $-a$ et a .

Proposition — Période et fréquence

La grandeur reprend les mêmes valeurs à intervalles réguliers. Sa **période** et sa **fréquence** valent

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (en s)} \qquad f = \frac{1}{T} \text{ (en Hz)} \qquad \text{donc } \omega = 2\pi f$$

En effet, quand t augmente de T , le nombre $\omega t + \varphi$ augmente de 2π : un tour complet du cercle, et le sinus reprend la même valeur.



Relevé de la tension du secteur en fonction du temps, sur deux périodes. Temps en millisecondes en abscisse, tension en volts en ordonnée. La flèche verticale a mesure l'amplitude, 325 V, du zéro au sommet ; la flèche horizontale mesure la période, d'un sommet au suivant.

Exemple — La tension du secteur

Sur le relevé ci-dessus, on lit une amplitude $a = 325 \text{ V}$ et une période $T = 20 \text{ ms} = 0,02 \text{ s}$. Donc $f = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ Hz}$ et $\omega = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi \approx 314 \text{ rad/s}$. La courbe part de 0 en montant : $\varphi = 0$ (§4). D'où $u(t) = 325 \sin(100\pi t)$.

Méthode — Lire amplitude et période sur une courbe

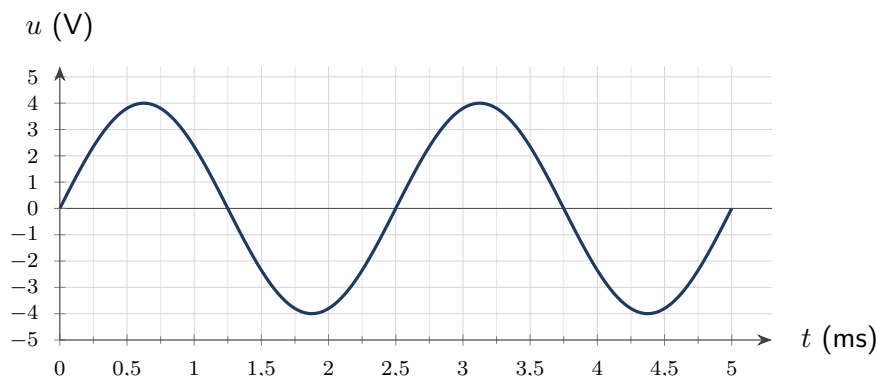
Amplitude : ordonnée d'un sommet, mesurée depuis l'axe horizontal — la moitié de l'écart entre le plus haut et le plus bas. **Période** : durée entre deux sommets consécutifs. Pour plus de précision, mesurer plusieurs périodes et diviser. **Unités** : convertir les millisecondes en secondes avant de calculer f ou ω .

Erreur fréquente — Amplitude et écart crête à crête

L'écart entre le point le plus haut et le point le plus bas vaut $2a$ (650 V pour le secteur) : ce n'est pas l'amplitude. De même, T et f sont inverses l'un de l'autre : ne pas écrire $f = 20 \text{ Hz}$ parce que la période vaut 20 ms.

Application 3 – Le signal d'un générateur

Un générateur délivre la tension u représentée ci-dessous.



Tension du générateur en fonction du temps : temps en millisecondes, tension en volts. Le quadrillage a un pas de 0,25 ms et de 1 V.

- a. Lire l'amplitude et la période. b. Calculer la fréquence et la pulsation. c. La courbe part de 0 en montant, donc $\varphi = 0$. Écrire $u(t)$.

Correction — Application 3

a. $a = 4 \text{ V}$; deux périodes durent 5 ms, donc $T = 2,5 \text{ ms} = 0,0025 \text{ s}$.

b. $f = \frac{1}{0,0025} = 400 \text{ Hz}$; $\omega = \frac{2\pi}{0,0025} = 800\pi \approx 2513 \text{ rad/s}$.

c. $u(t) = 4 \sin(800\pi t)$.

Conduite : faire mesurer T sur les deux périodes visibles, puis diviser par 2 : c'est plus précis qu'une seule lecture.

4 La phase à l'origine (C2)

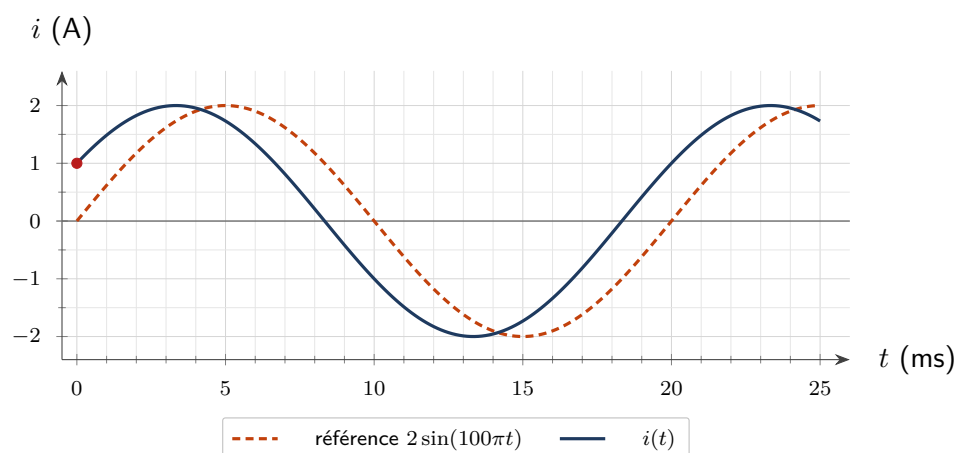
À l'instant $t = 0$, on a $u(0) = a \sin \varphi$: la phase fixe où commence la courbe. Elle fixe aussi dans quel sens elle part. La fonction sinus est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante ailleurs sur $] -\pi; \pi]$ (courbe de Première). Donc :

Proposition — Départ de la courbe à $t = 0$

La courbe de $u(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ part de la hauteur $u(0) = a \sin \varphi$. Elle part **en montant** si $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, **en descendant** si $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi < -\frac{\pi}{2}$. Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, elle part d'un sommet ; si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, d'un creux.

Méthode — Retrouver φ sur une courbe

1. Lire l'amplitude a , la valeur $u(0)$ et le sens de départ (montant ou descendant). 2. Résoudre $\sin \varphi = \frac{u(0)}{a}$ sur $] -\pi; \pi]$ (§2) : deux candidats. 3. Garder celui qui donne le bon sens : si la courbe monte, celui de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; sinon, l'autre.



Intensité i en fonction du temps (trait plein), comparée à la sinusoïde de même amplitude qui part de 0 (tirets). La courbe de i part de 1 A en montant : elle est décalée vers la gauche, elle est « en avance ».

Exemple — Lire la phase de l'intensité i

On lit $a = 2$ A, $T = 20$ ms donc $\omega = 100\pi$, et $i(0) = 1$ A avec une courbe qui **monte**.

$\sin \varphi = \frac{1}{2}$ donne $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ou $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. La courbe monte : on garde $\varphi = \frac{\pi}{6}$, qui est dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Donc $i(t) = 2 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Si la courbe était partie de 1 A en **descendant**, on aurait gardé $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

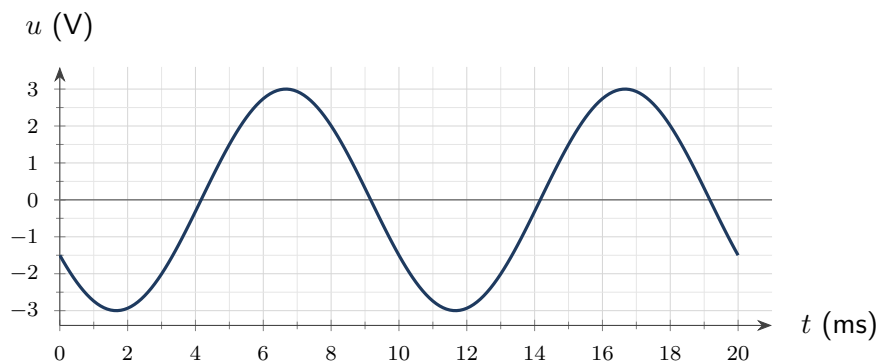
Remarque — Phase et décalage dans le temps

La courbe de $a \sin(\omega t + \varphi)$ est celle de $a \sin(\omega t)$ décalée de $\frac{\varphi}{\omega}$ secondes : vers la **gauche** si $\varphi > 0$ (grandeur « en avance »), vers la **droite** si $\varphi < 0$ (« en retard »). Ci-dessus : $\frac{\pi/6}{100\pi} = \frac{1}{600}$ s $\approx 1,7$ ms.

Erreur fréquente — Prendre arcsin sans regarder le sens

La calculatrice donne toujours un réel de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Pour une courbe qui part en descendant, cette valeur est fautive : il faut l'autre solution.

Application 4 – Une tension qui part en descendant



Tension u en fonction du temps sur deux périodes : temps en millisecondes, tension en volts ; quadrillage de pas 1 ms et 0,5 V.

- a. Lire a , T , $u(0)$ et le sens de départ. b. Calculer ω . c. Déterminer φ . d. Écrire $u(t)$.

Correction — Application 4

a. $a = 3 \text{ V}$, $T = 10 \text{ ms}$, $u(0) = -1,5 \text{ V}$, la courbe part en **descendant**.

b. $\omega = \frac{2\pi}{0,01} = 200\pi \approx 628 \text{ rad/s}$.

c. $\sin \varphi = \frac{-1,5}{3} = -\frac{1}{2}$: $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ou $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$. La courbe descend : on garde $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, qui n'est pas dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

d. $u(t) = 3 \sin\left(200\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$.

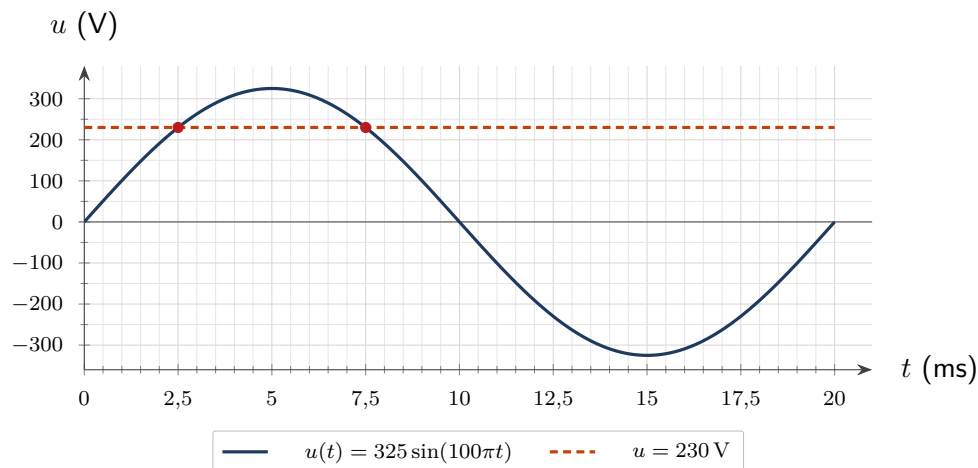
Conduite : contrôler en calculant $u(1 \text{ ms}) : 3 \sin(0,2\pi - \frac{5\pi}{6}) \approx -2,7 \text{ V}$, plus bas que $u(0)$: la courbe descend bien.

5 Résoudre $\sin(\omega t + \varphi) = c$ (C3)

On cherche les **instants** où une grandeur sinusoïdale prend une valeur donnée, sur un intervalle de temps fixé par la situation — le plus souvent une période $[0; T[$.

Méthode — Résoudre $a \sin(\omega t + \varphi) = k$ sur un intervalle de temps

1. Isoler le sinus : $\sin(\omega t + \varphi) = c$ avec $c = \frac{k}{a}$.
2. Poser $X = \omega t + \varphi$ et calculer l'intervalle parcouru par X : quand t va de 0 à T , X va de φ à $\varphi + 2\pi$.
3. Résoudre $\sin X = c$ sur $]-\pi; \pi]$ (§2), puis ajouter ou retrancher 2π pour ramener chaque solution dans l'intervalle de X .
4. Revenir au temps : $t = \frac{X - \varphi}{\omega}$, en secondes.
5. Contrôler sur la courbe : autant de solutions que de points d'intersection avec la droite horizontale.



Tension du secteur sur une période : temps en millisecondes, tension en volts. La droite horizontale $u = 230 \text{ V}$ coupe la courbe en deux points, vers 2,5 ms et 7,5 ms.

Exemple — À quels instants la tension du secteur vaut-elle 230 V ?

Sur la première période $[0; 0,02 \text{ s}]$, on résout $325 \sin(100\pi t) = 230$.

1. $\sin(100\pi t) = \frac{230}{325} \approx 0,7077$. 2. $X = 100\pi t$ parcourt $[0; 2\pi[$.

3. $X_1 = \arcsin(0,7077) \approx 0,7859$ et $X_2 = \pi - X_1 \approx 2,3557$: tous deux dans $[0; 2\pi[$.

4. $t_1 = \frac{0,7859}{100\pi} \approx 0,00250 \text{ s}$ et $t_2 = \frac{2,3557}{100\pi} \approx 0,00750 \text{ s}$, soit **2,5** et **7,5 ms**. 5. Deux intersections sur la figure : c'est cohérent.

Exemple — Une phase non nulle : ramener une solution dans l'intervalle

On résout $2 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{3}) = -1$ sur $[0; 0,02 \text{ s}]$.

$\sin X = -\frac{1}{2}$ avec X dans $[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi[= [-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}[$. Sur $]-\pi; \pi]$: $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

$-\frac{\pi}{6}$ est dans l'intervalle. $-\frac{5\pi}{6} < -\frac{\pi}{3}$ n'y est pas : on ajoute 2π et l'on obtient $\frac{7\pi}{6}$, qui y est.

$t = \frac{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{100\pi} = \frac{1}{600} \text{ s} \approx 1,67 \text{ ms}$ $t = \frac{\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{100\pi} = \frac{3}{200} \text{ s} = 15 \text{ ms}$.

Erreur fréquente — Trois pièges

Oublier de **diviser** par ω (on donne alors X , pas un temps) ; oublier de **retrancher** φ ; garder un X hors de l'intervalle, qui donne un temps négatif ou supérieur à T . Et toujours : calculatrice en mode radian.

Application 5 – Deux valeurs à atteindre

On considère $u(t) = 12 \sin(200\pi t)$, en volts, sur une période $[0; 0,01 \text{ s}]$.

a. À quels instants a-t-on $u(t) = 6 \text{ V}$? b. À quel instant a-t-on $u(t) = -12 \text{ V}$?

Correction — Application 5

$X = 200\pi t$ parcourt $[0; 2\pi[$.

a. $\sin X = \frac{1}{2}$: $X = \frac{\pi}{6}$ ou $X = \frac{5\pi}{6}$, tous deux dans l'intervalle. $t = \frac{\pi/6}{200\pi} = \frac{1}{1200} \text{ s} \approx 0,83 \text{ ms}$ et

$t = \frac{5\pi/6}{200\pi} = \frac{5}{1200} \text{ s} \approx 4,17 \text{ ms}$.

b. $\sin X = -1$: $X = -\frac{\pi}{2}$, hors de $[0; 2\pi[$; on ajoute 2π : $X = \frac{3\pi}{2}$. $t = \frac{3\pi/2}{200\pi} = \frac{3}{400} \text{ s} = 7,5 \text{ ms}$.

Contrôle : 7,5 ms correspond aux trois quarts de la période de 10 ms : c'est bien là que la sinusoïde atteint son creux.

Application 6 – Avec une phase et la calculatrice

On considère $i(t) = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$, en ampères. Déterminer, au centième de milliseconde, les instants de $[0; 0,02 \text{ s}[$ où $i(t) = 2 \text{ A}$.

Correction — Application 6

$\sin X = \frac{2}{5} = 0,4$ avec X dans $[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}]$, soit environ $[0,785; 7,069]$.

Sur $]-\pi; \pi]$: $X_1 = \arcsin(0,4) \approx 0,4115$ et $X_2 = \pi - 0,4115 \approx 2,7301$. X_2 est dans l'intervalle ; $X_1 < 0,785$ n'y est pas : $X_1 + 2\pi \approx 6,6947$, qui y est.

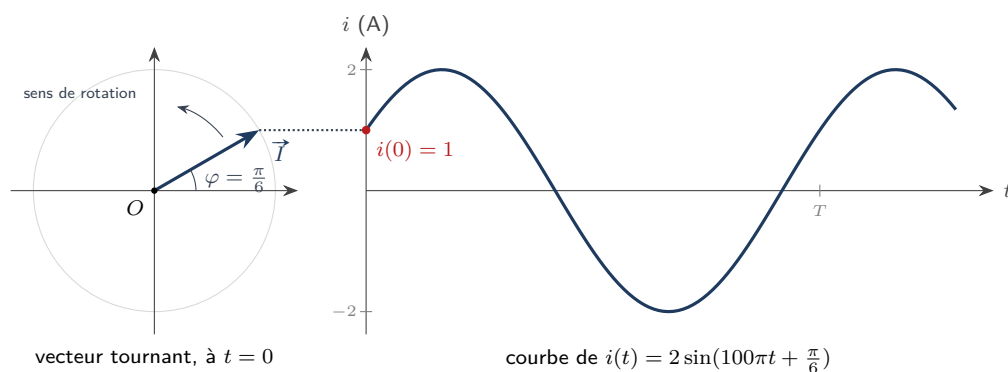
$t = \frac{2,7301 - 0,7854}{100\pi} \approx 0,006190 \text{ s} \approx 6,19 \text{ ms}$ et $t = \frac{6,6947 - 0,7854}{100\pi} \approx 0,018810 \text{ s} \approx 18,81 \text{ ms}$.

Conduite : garder quatre décimales pendant le calcul et n'arrondir qu'à la fin.

6 Le vecteur de Fresnel (C4)**Définition — Vecteur de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale**

À la grandeur $u(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$, on associe le **vecteur de Fresnel** $\vec{U}$: il part d'une origine O , sa **longueur** représente l'amplitude a (à une échelle choisie) et il fait avec l'**axe origine des phases**, horizontal, l'angle φ — compté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si $\varphi > 0$, dans le sens des aiguilles si $\varphi < 0$.

Pourquoi ce vecteur ? Faisons-le **tourner** autour de O , d'un tour par période. À l'instant t , il fait l'angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe : la **hauteur** de son extrémité vaut $a \sin(\omega t + \varphi)$, c'est-à-dire $u(t)$. La courbe de u enregistre cette hauteur au fil du temps.



À gauche, le vecteur de Fresnel de l'intensité i , à l'instant $t = 0$: longueur 2 A (échelle : 0,8 cm pour 1 A), angle $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe horizontal. À droite, la courbe de i . Les pointillés montrent que la hauteur de l'extrémité du vecteur est la valeur $i(0)$, là où la courbe coupe l'axe vertical.

Sur le vecteur de Fresnel

la longueur a

l'angle φ avec l'axe

la hauteur de l'extrémité

un tour complet

Sur la courbe de $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$

l'amplitude : hauteur des sommets

la phase : départ à la hauteur $a \sin \varphi$, en montant si $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

la valeur $u(0)$ lue sur l'axe vertical

une période T

Exemple — De l'expression au vecteur, et retour

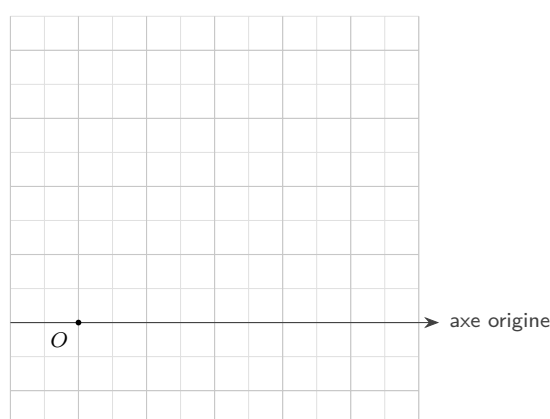
- a. $u(t) = 300 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$. Échelle : 1 cm pour 100 V. Le vecteur mesure 3 cm et fait un angle de $\frac{\pi}{4}$, soit 45° , **sous** l'axe. Son extrémité est à la hauteur $300 \sin(-\frac{\pi}{4}) \approx -212$ V : la courbe part sous l'axe, en montant, puisque $-\frac{\pi}{4}$ est dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- b. Un vecteur de 2 cm, à l'échelle 1 cm pour 5 A, faisant l'angle $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe, pour une pulsation 100π , représente $i(t) = 10 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$: l'intensité part de son maximum, 10 A.

Erreur fréquente — Degrés et radians dans l'expression

Le rapporteur mesure en degrés, l'expression $a \sin(\omega t + \varphi)$ s'écrit en radians : un angle de 60° s'écrit $\frac{\pi}{3}$. Un angle mesuré **sous** l'axe donne une phase **négative**.

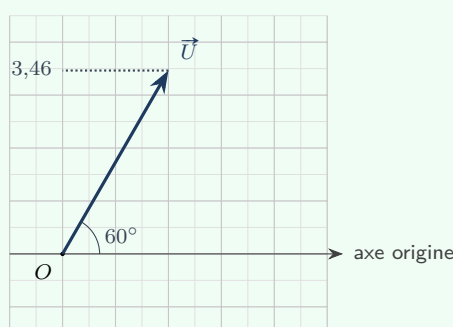
Application 7 – Tracer un vecteur de Fresnel

On considère $u(t) = 4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$, en volts.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases horizontal, quadrillage de 5 mm. Échelle imposée : 1 cm pour 1 V.

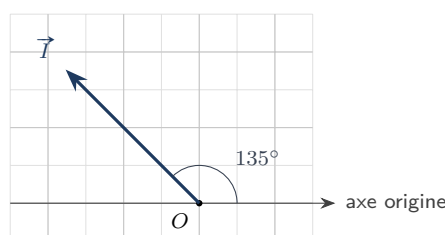
- a. Tracer le vecteur de Fresnel de u . b. Calculer $u(0)$ et le repérer sur la figure. c. La courbe de u part-elle en montant ou en descendant ?

Correction — Application 7

- a. Longueur 4 cm, angle $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ au-dessus de l'axe.
- b. $u(0) = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$ V : c'est la hauteur de l'extrémité du vecteur.
- c. $\frac{\pi}{3}$ est dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: la courbe part en **montant**.

Application 8 – Lire un vecteur de Fresnel

Le vecteur ci-dessous représente une intensité i de pulsation 100π , à l'échelle 1 cm pour 2 A.



Vecteur de Fresnel de l'intensité i à l'instant $t = 0$: longueur 2,5 cm, angle de 135° compté depuis l'axe origine des phases, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

- a. Écrire $i(t)$. b. Calculer $i(0)$. c. La courbe de i part-elle en montant ou en descendant ?

Correction — Application 8

a. Amplitude $2,5 \times 2 = 5$ A ; $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$: $i(t) = 5 \sin\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$.

b. $i(0) = 5 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$ A.

c. $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$: la courbe part au-dessus de l'axe, en **descendant**. Sur le vecteur qui tourne, l'extrémité est déjà passée par le point le plus haut.

7 Deux grandeurs de même fréquence : le déphasage (C4)

Deux grandeurs de même pulsation ont des vecteurs de Fresnel qui tournent **ensemble** : l'angle entre eux ne change pas.

Définition — Déphasage

Pour $u_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, le **déphasage** de u_2 par rapport à u_1 est $\varphi_2 - \varphi_1$: c'est l'angle entre leurs vecteurs de Fresnel. S'il est positif, u_2 est **en avance** sur u_1 ; s'il est négatif, u_2 est **en retard**.

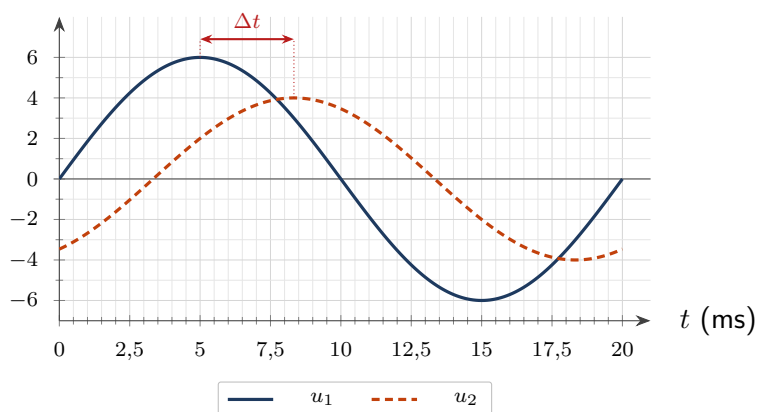
Proposition — Lire un déphasage sur les courbes

Si un même événement (un sommet, un passage par zéro en montant) se produit avec un décalage de Δt d'une courbe à l'autre, le déphasage vaut, en valeur absolue,

$$\omega \Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

La grandeur dont le sommet arrive **le premier** est en avance.

tension (V)



À gauche, deux tensions de même période 20 ms, en fonction du temps : le sommet de u_2 (tirets) arrive Δt après celui de u_1 (trait plein). À droite, leurs vecteurs de Fresnel à $t = 0$ (échelle 0,62 cm pour 1 V) : $\vec{U}_2$ est 60° sous $\vec{U}_1$.

Exemple — $u_1(t) = 6 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 4 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{3})$

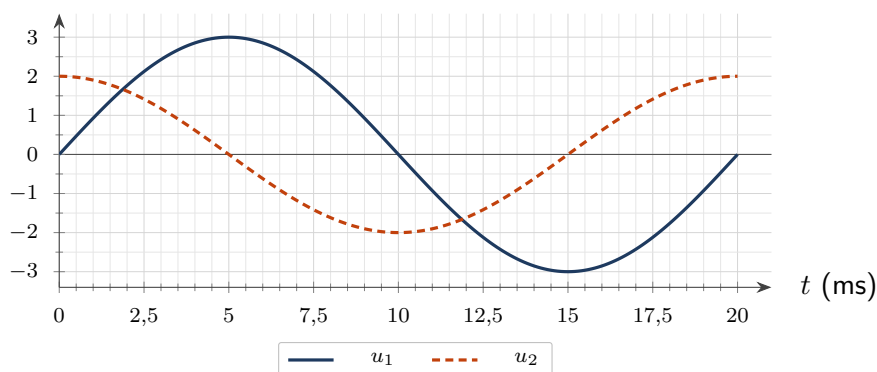
Le déphasage de u_2 par rapport à u_1 vaut $-\frac{\pi}{3} - 0 = -\frac{\pi}{3}$: u_2 est **en retard** de $\frac{\pi}{3}$, soit 60° . Sur les courbes : $\Delta t = \frac{\pi/3}{100\pi} = \frac{1}{300} \text{ s} \approx 3,3 \text{ ms}$; le sommet de u_1 est à 5 ms, celui de u_2 vers 8,3 ms.

Remarque — En physique-chimie

On mesure à l'oscilloscope le déphasage entre la tension aux bornes d'un appareil et l'intensité qui le traverse ; son cosinus est le facteur de puissance de l'appareil.

Application 9 – Mesurer un déphasage

tension (V)



Deux tensions de même période en fonction du temps : u_1 en trait plein, u_2 en tirets ; quadrillage de pas 0,5 ms et 0,5 V.

a. Lire les amplitudes et la période. **b.** Mesurer le décalage Δt entre les sommets ; laquelle des deux tensions est en avance ? **c.** Calculer le déphasage de u_2 par rapport à u_1 . **d.** Écrire $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

Correction — Application 9

- a.** $a_1 = 3 \text{ V}$, $a_2 = 2 \text{ V}$, $T = 20 \text{ ms}$.
b. Le sommet de u_2 est à $t = 0$, celui de u_1 à 5 ms : $\Delta t = 5 \text{ ms}$. Le sommet de u_2 arrive le premier : u_2 est en **avance**.
c. $2\pi \times \frac{5}{20} = \frac{\pi}{2}$: déphasage $+\frac{\pi}{2}$ (90°).
d. $u_1(t) = 3 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 2 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$. Leurs vecteurs de Fresnel sont perpendiculaires : on dit que les tensions sont en **quadrature**.

8 Ajouter deux grandeurs de même fréquence (C5)

Les vecteurs de Fresnel servent d'abord à cela : additionner deux tensions en série, ou deux intensités qui se rejoignent, quand elles ont la même fréquence.

Proposition — Somme de deux grandeurs sinusoïdales (admise)

Si u_1 et u_2 ont la même pulsation ω , alors $u = u_1 + u_2$ est une grandeur sinusoïdale de même pulsation. Son vecteur de Fresnel est la **somme** $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$: sa longueur donne l'amplitude de u , son angle donne la phase.

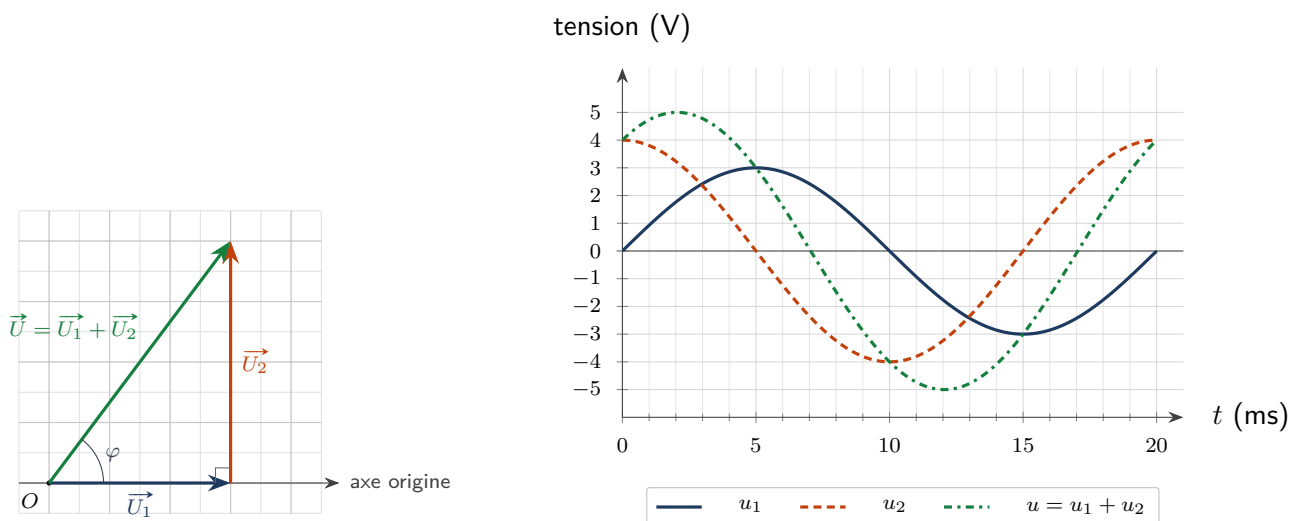
L'idée : les deux vecteurs tournent ensemble ; la hauteur de l'extrémité de $\vec{U}_1 + \vec{U}_2$ est la somme des hauteurs, donc $u_1(t) + u_2(t)$, à chaque instant.

Méthode — Construire la somme à l'échelle

1. Choisir une échelle. 2. Tracer $\vec{U}_1$ depuis O . 3. À partir de l'extrémité de $\vec{U}_1$, tracer un vecteur égal à $\vec{U}_2$ (même longueur, même direction, même sens). 4. $\vec{U}$ va de O à la dernière extrémité. 5. Mesurer sa longueur à la règle (amplitude) et son angle au rapporteur (phase).

Méthode — Trois cas qui se calculent

En phase ($\varphi_1 = \varphi_2$) : les amplitudes s'ajoutent, $a = a_1 + a_2$. **En opposition** (déphasage π) : $a = |a_1 - a_2|$, avec la phase de la plus grande. **En quadrature** (déphasage $\frac{\pi}{2}$) : le triangle est rectangle ; $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (Pythagore) et l'angle se calcule par la tangente.



À gauche, construction de $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ sur un quadrillage de 5 mm, à l'échelle 0,8 cm pour 1 V : les deux vecteurs sont mis bout à bout. À droite, les trois tensions en fonction du temps : le sommet de u (trait mixte) monte à 5 V, pas à $3 + 4 = 7$ V.

Exemple — $u_1(t) = 3 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$

Les deux tensions sont en quadrature : le triangle de la construction est rectangle.

Amplitude : $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ V. Phase : $\tan \varphi = \frac{4}{3}$, donc $\varphi = \arctan \frac{4}{3} \approx 0,927$ rad, soit environ $53,1^\circ$.

Donc $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \approx 5 \sin(100\pi t + 0,93)$.

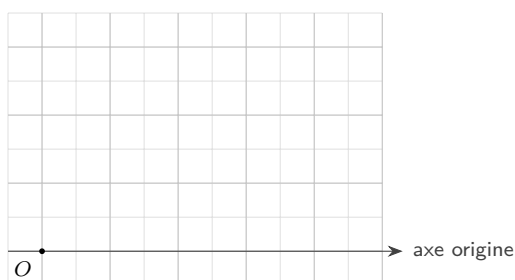
Erreur fréquente — Les amplitudes ne s'ajoutent pas

$3 + 4 = 7$ serait juste si les deux tensions atteignaient leur sommet au même instant. Ici elles sont décalées d'un quart de période : la somme ne dépasse jamais 5 V. On n'ajoute les amplitudes que pour

des grandeurs **en phase**.

Application 10 – Deux tensions en quadrature

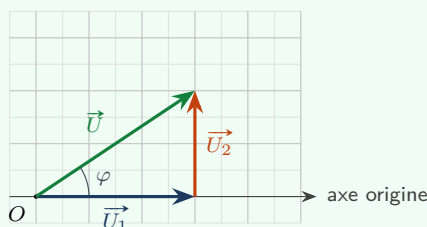
On reprend $u_1(t) = 3 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 2 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ de l'application 9.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases, quadrillage de 5 mm. Échelle imposée : 1 cm pour 1 V.

a. Construire $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$. **b.** Calculer l'amplitude et la phase de $u = u_1 + u_2$. **c.** Écrire $u(t)$ et comparer avec la mesure sur la figure.

Correction — Application 10



b. Quadrature : $a = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61 \text{ V}$; $\tan \varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi = \arctan \frac{2}{3} \approx 0,588 \text{ rad}$, soit environ $33,7^\circ$.

c. $u(t) \approx 3,61 \sin(100\pi t + 0,59)$. Sur la figure, $\vec{U}$ mesure environ 3,6 cm et fait environ 34° avec l'axe : la construction confirme le calcul, à la précision de la règle et du rapporteur.

9 Soustraire deux grandeurs (C5)

Proposition — Différence de deux grandeurs de même fréquence

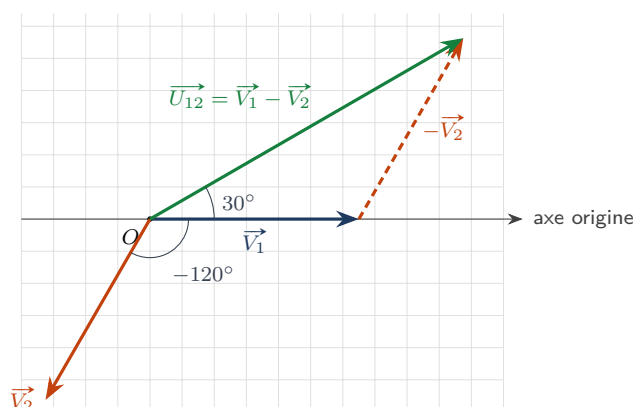
Le vecteur de Fresnel de $u_1 - u_2$ est $\vec{U}_1 - \vec{U}_2 = \vec{U}_1 + (-\vec{U}_2)$. Le vecteur $-\vec{U}_2$ a la même longueur que $\vec{U}_2$ et le sens contraire : son angle est $\varphi_2 + \pi$ ou $\varphi_2 - \pi$, celui des deux qui est dans $] -\pi ; \pi]$.

Exemple — Du 230 V au 400 V : la tension entre deux phases

Dans le réseau triphasé, les tensions entre chaque phase et le neutre ont la même amplitude, 325 V, et sont déphasées de $\frac{2\pi}{3}$ (120°) : $v_1(t) = 325 \sin(100\pi t)$ et $v_2(t) = 325 \sin(100\pi t - \frac{2\pi}{3})$. La tension entre les deux phases est $u_{12} = v_1 - v_2$.

$-\vec{V}_2$ a pour angle $-\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$. On ajoute $\vec{V}_1$ (angle 0) et $-\vec{V}_2$ (angle $\frac{\pi}{3}$), de même longueur : le parallélogramme est un losange, et $\vec{U}_{12}$ suit sa diagonale, à $\frac{\pi}{6}$ de l'axe.

Le losange se coupe en triangles rectangles : la moitié de la diagonale vaut $325 \cos \frac{\pi}{6}$. Donc $a = 2 \times 325 \times \cos \frac{\pi}{6} = 325\sqrt{3} \approx 563 \text{ V}$ et $u_{12}(t) \approx 563 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$.



Construction de la tension entre deux phases, à l'échelle 0,85 cm pour 100 V : $\vec{V}_2$ est tracé à 120° sous l'axe ; son opposé $-\vec{V}_2$ (tirets) est mis au bout de $\vec{V}_1$; la somme $\vec{U}_{12}$ fait 30° avec l'axe.

Remarque — Pourquoi « réseau 230/400 V »

Les amplitudes 325 V et 563 V correspondent aux valeurs efficaces 230 V et $230\sqrt{3} \approx 400$ V (valeur efficace = amplitude divisée par $\sqrt{2}$, relation vue en physique-chimie).

Application 11 – En phase

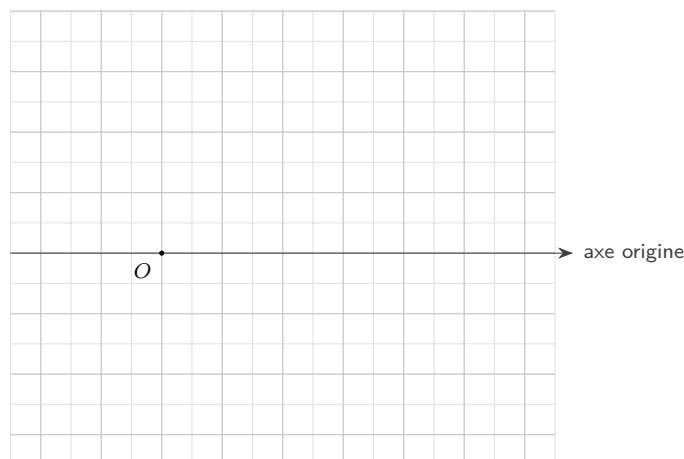
On considère $i_1(t) = 2 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$ et $i_2(t) = 1,5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$, en ampères. Écrire $i_1 + i_2$ et $i_1 - i_2$ sous la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$.

Correction — Application 11

Les deux vecteurs ont la même direction et le même sens (en phase). $i_1 + i_2 = 3,5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$: les longueurs s'ajoutent. $i_1 - i_2 = 0,5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$: $-\vec{I}_2$ est dans le sens contraire, les longueurs se retranchent et le plus long, $\vec{I}_1$, impose le sens.

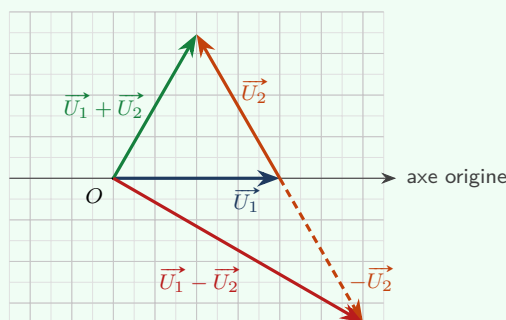
Application 12 – Une somme et une différence à construire

On considère $u_1(t) = 4 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, en volts.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases, quadrillage de 5 mm. Échelle imposée : 1 cm pour 1 V.

- a.** Construire $\vec{U}_1 + \vec{U}_2$; mesurer l'amplitude et la phase de $u_1 + u_2$. **b.** Construire $\vec{U}_1 - \vec{U}_2$; mesurer l'amplitude et la phase de $u_1 - u_2$.

Correction — Application 12

- a.** $\vec{U}_1 + \vec{U}_2$ mesure 4 cm et fait 60° avec l'axe : $u_1 + u_2 = 4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$. Le triangle est équilatéral : la somme de deux tensions de 4 V n'a que 4 V d'amplitude.
b. $-\vec{U}_2$ a pour angle $\frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$. $\vec{U}_1 - \vec{U}_2$ mesure environ 6,9 cm et fait environ -30° : $u_1 - u_2 \approx 6,9 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$. Calcul exact, comme pour le réseau triphasé : $2 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$ V.

Remarque — Aller plus loin — le calcul dans le cas général

Hors des trois cas particuliers, on peut calculer les coordonnées de $\vec{U}$: $X = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2$ et $Y = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$, puis $a = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\cos \varphi = \frac{X}{a}$, en gardant pour φ le signe de Y (§1). Ce calcul repose sur la formule d'addition $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, qui n'est pas au programme du module. Il n'est pas exigé : la construction à l'échelle suffit.

Bilan – Je sais faire**À retenir**

Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$: $\cos x = a$ donne $\pm \arccos a$; $\sin x = b$ donne $\arcsin b$ et $\pi - \arcsin b$ (si $b \geq 0$) ou $-\pi - \arcsin b$ (si $b < 0$).

Grandeur sinusoïdale $a \sin(\omega t + \varphi)$: amplitude a , période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, fréquence $f = \frac{1}{T}$, départ à la

hauteur $a \sin \varphi$.

Vecteur de Fresnel : longueur a , angle φ ; il tourne d'un tour par période et la hauteur de son extrémité est la valeur de la grandeur.

Somme de deux grandeurs de même fréquence : somme des vecteurs de Fresnel.

Méthode — Choisir sa méthode

Une valeur d'angle à trouver : tracer la droite sur le cercle, puis $\arccos$ ou $\arcsin$. **Un instant à trouver** : poser $X = \omega t + \varphi$, ramener dans l'intervalle, diviser par ω . **Une phase à lire** : $\sin \varphi = \frac{u(0)}{a}$ et le sens de départ. **Une somme ou une différence** : construire à l'échelle ; calculer seulement en phase, en opposition ou en quadrature.

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Ma calculatrice est-elle en mode radian ? 2. Mes solutions sont-elles dans l'intervalle demandé ? 3. Ai-je autant de solutions que de points d'intersection sur la courbe ? 4. Un instant trouvé est-il compris entre 0 et T , en secondes ? 5. L'amplitude d'une somme est-elle au plus égale à la somme des amplitudes ?

Remarque — Ce que ce chapitre ne demande pas

La loi des sinus, la loi des cosinus dans un triangle quelconque et les formules d'addition ne font pas partie de ce module. Le cercle trigonométrique, les valeurs particulières et la courbe du sinus sont des acquis de Première, seulement rappelés ici.