

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 7****Trigonométrie**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les cinq capacités du chapitre, dans l'ordre du cours. Chaque capacité commence par un rappel ; les exercices vont d'une entrée guidée vers un travail autonome, et se terminent par un contrôle ou la recherche d'une erreur. Règle, rapporteur et calculatrice en mode **radian** sont nécessaires. Écrire les calculs, puis une phrase de réponse avec l'unité quand la grandeur en a une. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Résoudre les équations de la forme $\cos x = a$ et $\sin x = b$ sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$	1 à 6	2
C2 – Lire, sur la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$, l'amplitude, la période et la phase à l'origine	7 à 12	5
C3 – Résoudre les équations de la forme $\sin(\omega t + \varphi) = c$ sur un intervalle approprié au contexte	13 à 17	8
C4 – Établir des liens entre le vecteur de Fresnel d'une tension ou d'une intensité sinusoïdale de la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$ et la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$	18 à 22	10
C5 – Ajouter ou soustraire deux tensions ou intensités sinusoïdales de même fréquence à l'aide de leurs vecteurs de Fresnel	23 à 28	13

L'exercice 28 est marqué « Aller plus loin » : il emploie un calcul par projection que le programme n'exige pas. Ce chapitre correspond au module « Trigonométrie » du programme, destiné aux spécialités du groupement A.

C1 – Résoudre les équations de la forme $\cos x = a$ et $\sin x = b$ sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$

Exigible. Prérequis : cercle trigonométrique, valeurs particulières et symétries (Première).

Rappel de cours

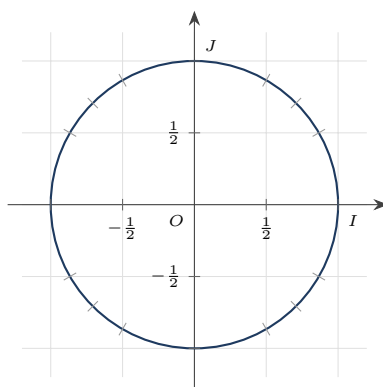
$\cos x = a$: droite **verticale** d'abscisse a ; solutions $\arccos a$ et $-\arccos a$. Cas particuliers : $a = 1$ donne 0 ; $a = -1$ donne π .

$\sin x = b$: droite **horizontale** d'ordonnée b ; $x_1 = \arcsin b$, puis $x_2 = \pi - x_1$ si $b \geq 0$, $x_2 = -\pi - x_1$ si $b < 0$.

Aucune solution si le nombre est hors de $[-1 ; 1]$. Calculatrice en mode radian.

Exercice 1 — Tracer, lire, conclure : $\cos x = -\frac{1}{2}$

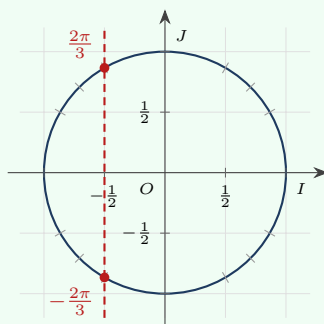
On veut résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$.



Cercle trigonométrique vu de face, rayon 1 ; axes gradués de 0,5 en 0,5 ; les petits traits sur le cercle repèrent les multiples de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{4}$.

- Sur le cercle, tracer la droite verticale d'abscisse $-\frac{1}{2}$. Combien de points du cercle obtient-on ?
- Ces points sont symétriques par rapport à quel axe ?
- Sachant que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donner les deux solutions. Vérifier qu'elles sont dans $] -\pi ; \pi]$.

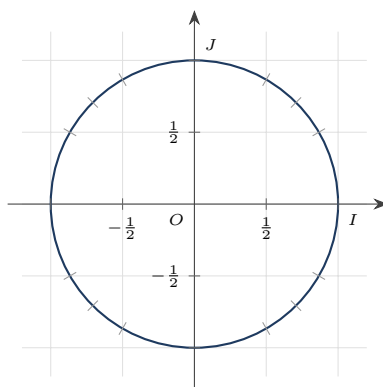
Correction de l'exercice 1



- La droite coupe le cercle en **deux** points.
- Ils sont symétriques par rapport à l'axe **horizontal**.
- Le point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ en haut est le symétrique de celui de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe vertical : c'est l'image de $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Solutions : $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$; toutes deux sont comprises entre $-\pi$ et π . Contrôle : $\arccos(-0,5) \approx 2,094 \approx \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 2 — Tracer, lire, conclure : deux équations en sinus

On veut résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ les équations $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (on rappelle que $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$).



Cercle trigonométrique vu de face, rayon 1 ; axes gradués de 0,5 en 0,5 ; les petits traits sur le cercle repèrent les multiples de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{4}$.

- Tracer les deux droites horizontales d'ordonnées $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Donner les deux solutions de $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis celles de $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Quelle formule, $\pi - x_1$ ou $-\pi - x_1$, donne la seconde solution dans chaque cas ?

Correction de l'exercice 2

- Deux droites horizontales, à la hauteur 0,87 et -0,87 ; chacune coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe vertical.
- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} : x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} : x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$.
- Pour $b > 0 : \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Pour $b < 0 : -\pi - (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{2\pi}{3}$. La formule $\pi - x_1$ aurait donné $\frac{4\pi}{3}$, hors de l'intervalle.

Exercice 3 — Six valeurs particulières

Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$, en valeurs exactes. S'aider d'un cercle.

- $\cos x = 0$
- $\sin x = 0$
- $\cos x = -1$
- $\sin x = 1$
- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = -\frac{1}{2}$

Correction de l'exercice 3

- $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (points d'abscisse nulle : haut et bas du cercle).
- 0 et π ; $-\pi$ est exclu de l'intervalle.
- π seulement.
- $\frac{\pi}{2}$ seulement.
- $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
- $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, et comme $b < 0$, $x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 4 — À la calculatrice

Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$; donner les solutions arrondies au centième. La calculatrice est en mode radian.

- $\cos x = 0,3$
- $\cos x = -0,75$
- $\sin x = 0,85$
- $\sin x = -0,2$

Correction de l'exercice 4

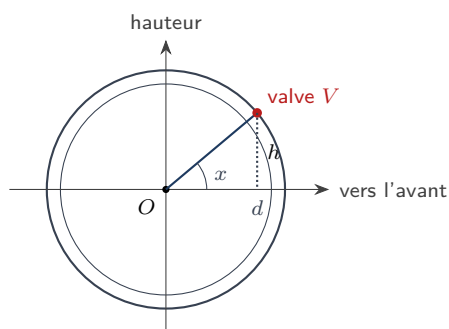
- $\arccos(0,3) \approx 1,2661 : x \approx 1,27$ ou $x \approx -1,27$.
- $\arccos(-0,75) \approx 2,4189 : x \approx 2,42$ ou $x \approx -2,42$.
- $x_1 = \arcsin(0,85) \approx 1,0160 ; b > 0 : x_2 = \pi - 1,0160 \approx 2,1256$. Solutions $x \approx 1,02$ et $x \approx 2,13$.

d. $x_1 = \arcsin(-0,2) \approx -0,2014$; $b < 0$: $x_2 = -\pi + 0,2014 \approx -2,9402$. Solutions $x \approx -0,20$ et $x \approx -2,94$.

Contrôle : remplacer chaque valeur dans la calculatrice ; par exemple $\sin(-2,94) \approx -0,20$.

Exercice 5 — La valve d'une roue de vélo

Un vélo est retourné pour l'entretien et l'on fait tourner sa roue, de rayon 35 cm. On repère la valve V par l'angle x , en radians, que fait le rayon $[OV]$ avec l'horizontale vers l'avant, compté positivement vers le haut ; on prend x dans $] -\pi ; \pi]$. La hauteur de la valve au-dessus de l'axe O vaut $h = 35 \sin x$ et sa position vers l'avant vaut $d = 35 \cos x$, en centimètres (négative quand la valve est en arrière de l'axe).



Roue vue de côté, axe O fixe. Le rayon $[OV]$ mesure 35 cm ; l'angle x est compté depuis l'horizontale vers l'avant ; h est la hauteur de la valve au-dessus de l'axe, d sa position vers l'avant.

- Pour quelles positions x la valve est-elle 17,5 cm au-dessus de l'axe ? Valeurs exactes.
- Pour quelles positions est-elle 28 cm en arrière de l'axe ($d = -28$) ? Valeurs au centième.
- La valve peut-elle être à 40 cm au-dessus de l'axe ? Justifier.

Correction de l'exercice 5

- $35 \sin x = 17,5$ donne $\sin x = 0,5$: $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Deux positions, l'une en avant, l'autre en arrière de l'axe, à la même hauteur.
- $35 \cos x = -28$ donne $\cos x = -0,8$; $\arccos(-0,8) \approx 2,4981$: $x \approx 2,50$ ou $x \approx -2,50$. Une position au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe.
- Il faudrait $\sin x = \frac{40}{35} \approx 1,14 > 1$: **impossible**. La valve ne s'éloigne jamais de l'axe de plus que le rayon, 35 cm.

Exercice 6 — Trouver l'erreur

- Pour résoudre $\sin x = -0,4$ sur $] -\pi ; \pi]$, Inès trouve $x \approx -0,41$ et $x \approx 3,55$. Sa seconde valeur est-elle une solution de l'équation ? Convient-elle ? Corriger.
- Pour $\cos x = \frac{1}{2}$, Tom répond « $x = \frac{\pi}{3}$ ». Que manque-t-il ?

Correction de l'exercice 6

- $3,55 = \pi - (-0,41)$: c'est bien une solution de l'équation ($\sin 3,55 \approx -0,40$), mais $3,55 > \pi$, elle n'est pas dans $] -\pi ; \pi]$. Comme $b < 0$, il faut $x_2 = -\pi - x_1 \approx -\pi + 0,4115 \approx -2,73$. Solutions : $x \approx -0,41$ et $x \approx -2,73$.
- Il manque la seconde solution, $-\frac{\pi}{3}$: la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points.

C2 – Lire, sur la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$, l'amplitude, la période et la phase à l'origine

Exigible, au titre du lien entre vecteur de Fresnel et courbe. Prérequis : C1, courbe du sinus (Première).

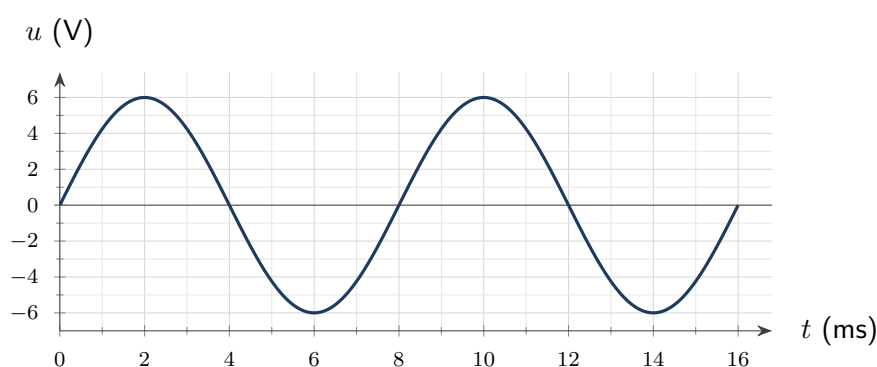
Rappel de cours

$u(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$: **amplitude** a (hauteur d'un sommet depuis l'axe), **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$, **fréquence** $f = \frac{1}{T}$, $\omega = 2\pi f$.

Phase : $u(0) = a \sin \varphi$. On résout $\sin \varphi = \frac{u(0)}{a}$ et l'on garde la solution de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ si la courbe part en montant, l'autre si elle part en descendant.

Exercice 7 — Lire un signal de générateur

Un générateur de laboratoire délivre la tension u ci-dessous.



Tension u en fonction du temps : temps en millisecondes, tension en volts ; quadrillage de pas 1 ms et 1 V.

- Amplitude : $a = \dots\dots$ V. Période : $T = \dots\dots$ ms = $\dots\dots$ s.
- Fréquence : $f = \frac{1}{T} = \dots\dots$ Hz. Pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \dots\dots$ rad/s.
- La courbe part de 0 en montant. Écrire $u(t)$.

Correction de l'exercice 7

- $a = 6$ V ; deux périodes durent 16 ms, donc $T = 8$ ms = 0,008 s.
- $f = \frac{1}{0,008} = 125$ Hz ; $\omega = \frac{2\pi}{0,008} = 250\pi \approx 785$ rad/s.
- Départ de 0 en montant : $\varphi = 0$. $u(t) = 6 \sin(250\pi t)$.

Exercice 8 — De l'expression aux caractéristiques

Pour chaque grandeur, donner l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase à l'origine.

- $u(t) = 17 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$, en volts.
- $i(t) = 0,8 \sin(2000\pi t - \frac{\pi}{4})$, en ampères.
- Un micro placé devant un diapason qui donne le « la » de référence délivre $u(t) = 0,04 \sin(880\pi t)$, en volts. Retrouver la fréquence de ce « la ».

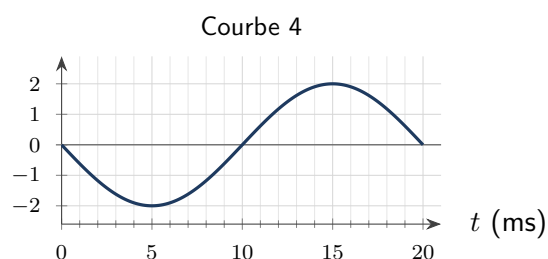
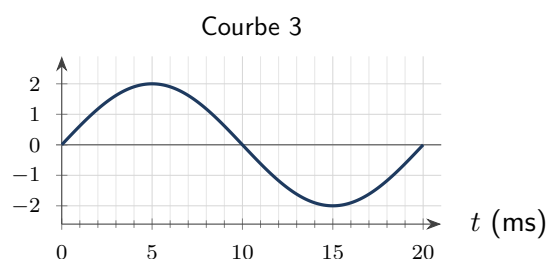
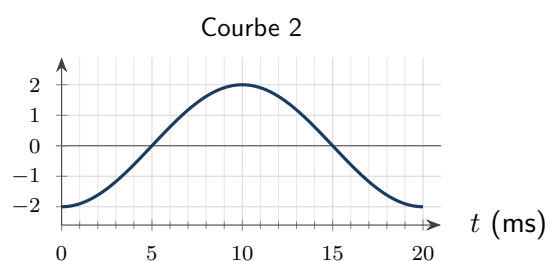
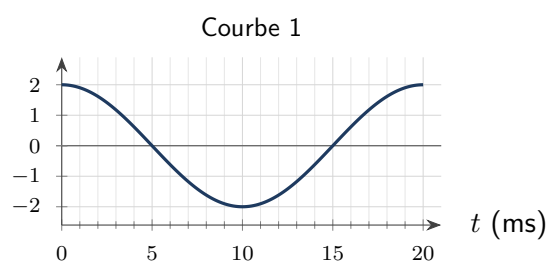
Correction de l'exercice 8

- $a = 17$ V, $\omega = 100\pi$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02$ s, $f = 50$ Hz, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- $a = 0,8$ A, $\omega = 2000\pi$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{2000\pi} = 0,001$ s = 1 ms, $f = 1\,000$ Hz, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
- $a = 0,04$ V = 40 mV, $\omega = 880\pi$, $T = \frac{2\pi}{880\pi} = \frac{1}{440}$ s $\approx 2,27$ ms, $f = 440$ Hz, $\varphi = 0$. C'est la fréquence du « la » de référence des musiciens.

Exercice 9 — Associer courbes et expressions

Les quatre courbes ont la même amplitude, 2, et la même période, 20 ms. Associer chacune à son expression, et justifier par la valeur en $t = 0$ et le sens de départ.

A : $2 \sin(100\pi t)$ **B** : $2 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ **C** : $2 \sin(100\pi t + \pi)$ **D** : $2 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})$



Quatre sinusôides en fonction du temps, sur une période : temps en millisecondes en abscisse, valeur de la grandeur en ordonnée.

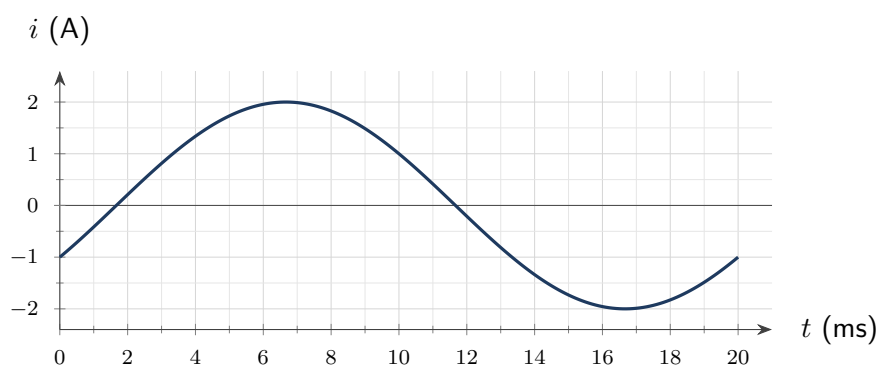
Correction de l'exercice 9

Courbe 1 – **B** : elle part de 2, son sommet ; $2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$.

Courbe 2 – **D** : elle part de -2, son creux ; $2 \sin(-\frac{\pi}{2}) = -2$.

Courbe 3 – **A** : elle part de 0 en montant ; $\varphi = 0$ est dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Courbe 4 – **C** : elle part de 0 en descendant ; $\varphi = \pi > \frac{\pi}{2}$.

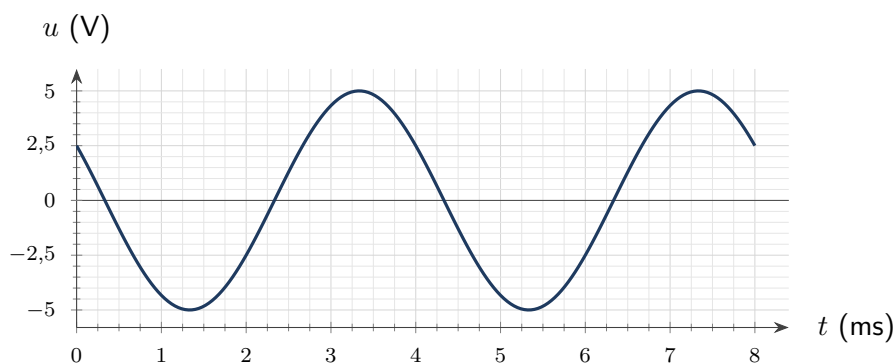
Exercice 10 — Retrouver une phase, étape par étape

Intensité i en fonction du temps : temps en millisecondes, intensité en ampères ; quadrillage de pas 1 ms et 0,5 A.

- Lire l'amplitude a , la période T , puis calculer ω .
- Lire $i(0)$. La courbe part-elle en montant ou en descendant ?
- Résoudre $\sin \varphi = \frac{i(0)}{a}$ sur $]-\pi; \pi]$: écrire les deux candidats.
- Choisir φ et écrire $i(t)$.

Correction de l'exercice 10

- a. $a = 2 \text{ A}$, $T = 20 \text{ ms}$, $\omega = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi$.
 b. $i(0) = -1 \text{ A}$; la courbe part en **montant**.
 c. $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$: $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ou $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$.
 d. La courbe monte : $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. $i(t) = 2 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$.

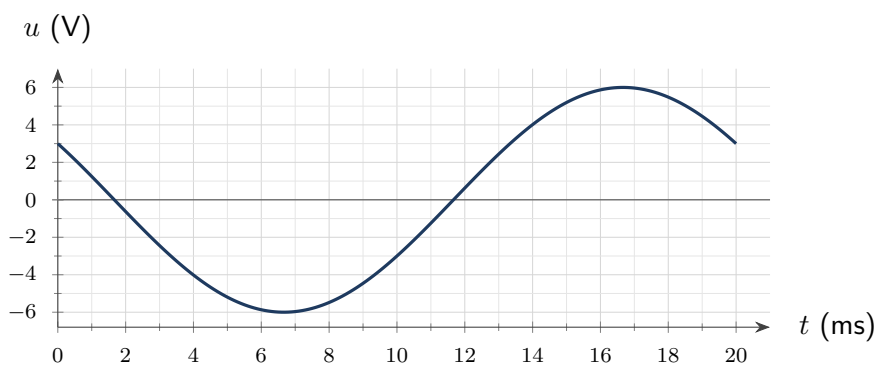
Exercice 11 — Écrire l'expression d'une tension

Tension u en fonction du temps : temps en millisecondes, tension en volts ; quadrillage de pas 0,25 ms et 0,5 V.

- a. Déterminer l'expression $u(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ de cette tension.
 b. Contrôler en calculant $u(1 \text{ ms})$ et en comparant avec la courbe.

Correction de l'exercice 11

- a. $a = 5 \text{ V}$; $T = 4 \text{ ms}$, donc $\omega = \frac{2\pi}{0,004} = 500\pi$. $u(0) = 2,5 \text{ V}$ et la courbe part en **descendant**.
 $\sin \varphi = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$; la courbe descend, donc $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. $u(t) = 5 \sin(500\pi t + \frac{5\pi}{6})$.
 b. $u(0,001) = 5 \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}) = 5 \sin \frac{4\pi}{3} \approx -4,33 \text{ V}$: sur la courbe, à $t = 1 \text{ ms}$, on lit bien environ $-4,3 \text{ V}$.

Exercice 12 — Deux erreurs de lecture

Tension u en fonction du temps : temps en millisecondes, tension en volts ; quadrillage de pas 1 ms et 1 V.

Pour cette tension, Nora écrit « l'amplitude vaut 12 V » et Léo écrit « $u(t) = 6 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$ ».

- a. Expliquer l'erreur de Nora.
 b. Expliquer l'erreur de Léo, puis corriger son expression.

Correction de l'exercice 12

- a. 12 V est l'écart entre le point le plus haut (6 V) et le plus bas (−6 V). L'amplitude se mesure depuis l'axe : $a = 6 \text{ V}$.

b. $u(0) = 3 \text{ V}$ donne bien $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, mais la courbe part en **descendant** : $\frac{\pi}{6}$ la ferait monter. Il faut l'autre solution, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Avec $T = 20 \text{ ms}$, $\omega = 100\pi$: $u(t) = 6 \sin\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$.

C3 – Résoudre les équations de la forme $\sin(\omega t + \varphi) = c$ sur un intervalle approprié au contexte

Exigible. Prérequis : C1 et C2.

Rappel de cours

1. Isoler le sinus. 2. Poser $X = \omega t + \varphi$: pour t dans $[0; T[$, X est dans $[\varphi; \varphi + 2\pi[$. 3. Résoudre $\sin X = c$ sur $] -\pi; \pi]$, puis ajouter ou retrancher 2π pour ramener chaque solution dans l'intervalle de X . 4. $t = \frac{X - \varphi}{\omega}$. 5. Contrôler sur la courbe le nombre de solutions.

Exercice 13 — Résoudre pas à pas

On considère $u(t) = 10 \sin(100\pi t)$, en volts. On cherche les instants de la première période, $[0; 0,02 \text{ s}]$, où $u(t) = -5 \text{ V}$.

- Isoler le sinus : $\sin(100\pi t) = \dots$
- Quand t parcourt $[0; 0,02[$, quel intervalle parcourt $X = 100\pi t$?
- Résoudre $\sin X = -\frac{1}{2}$ sur $] -\pi; \pi]$, puis ramener les deux solutions dans l'intervalle du b.
- En déduire les instants, en millisecondes, au centième.

Correction de l'exercice 13

- $\sin(100\pi t) = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$.
- X parcourt $[0; 2\pi[$.
- Sur $] -\pi; \pi]$: $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. Toutes deux sont négatives : on ajoute 2π . $X = \frac{11\pi}{6}$ et $X = \frac{7\pi}{6}$.
- $t = \frac{7\pi/6}{100\pi} = \frac{7}{600} \text{ s} \approx 11,67 \text{ ms}$ et $t = \frac{11\pi/6}{100\pi} = \frac{11}{600} \text{ s} \approx 18,33 \text{ ms}$. Les deux instants sont dans la seconde moitié de la période, là où la tension est négative.

Exercice 14 — Avec une phase à l'origine

On considère $i(t) = 4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$, en ampères. Déterminer les instants de $[0; 0,02 \text{ s}]$ où $i(t) = 2 \text{ A}$. Donner les valeurs exactes, puis en millisecondes.

Correction de l'exercice 14

$\sin X = \frac{1}{2}$ avec $X = 100\pi t + \frac{\pi}{2}$ dans $[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}[$.
 Sur $] -\pi; \pi]$: $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. $\frac{5\pi}{6}$ est dans l'intervalle ; $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ n'y est pas : $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, qui y est.
 $t = \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}}{100\pi} = \frac{1}{300} \text{ s} \approx 3,33 \text{ ms}$ et $t = \frac{\frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{2}}{100\pi} = \frac{1}{60} \text{ s} \approx 16,67 \text{ ms}$.
 Contrôle : $i\left(\frac{1}{300}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 2$.

Exercice 15 — Au-dessus d'un seuil

La tension du secteur est modélisée par $u(t) = 325 \sin(100\pi t)$, en volts. Un détecteur s'allume tant que la tension dépasse 200 V .

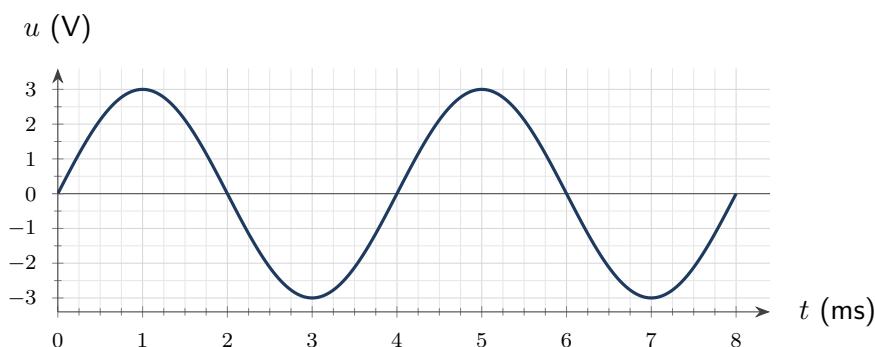
- Déterminer, au centième de milliseconde, les instants de la première période $[0; 20 \text{ ms}]$ où $u(t) = 200 \text{ V}$.
- Pendant combien de temps, par période, le détecteur est-il allumé ? Quel pourcentage de la période cela représente-t-il ?

Correction de l'exercice 15

- a. $\sin X = \frac{200}{325} \approx 0,6154$, $X = 100\pi t$ dans $[0; 2\pi[$. $X_1 = \arcsin(0,6154) \approx 0,6631$ et $X_2 = \pi - X_1 \approx 2,4785$, tous deux dans l'intervalle. $t_1 = \frac{0,6631}{100\pi} \approx 2,11$ ms et $t_2 = \frac{2,4785}{100\pi} \approx 7,89$ ms.
- b. La tension dépasse 200 V entre t_1 et t_2 : pendant environ $7,89 - 2,11 = 5,78$ ms, soit $\frac{5,78}{20} \approx 29\%$ de la période. (Pendant l'alternance négative, u reste sous 200 V.)

Exercice 16 — Sur deux périodes

On considère $u(t) = 3 \sin(500\pi t)$, en volts, représentée ci-dessous sur deux périodes.



Tension u sur l'intervalle $[0; 8 \text{ ms}]$: temps en millisecondes, tension en volts ; quadrillage de pas 0,25 ms et 0,5 V.

- a. Tracer la droite $u = 1,5$ V. Combien de solutions l'équation $u(t) = 1,5$ a-t-elle sur $[0; 8 \text{ ms}]$?
- b. Les calculer, en millisecondes, au centième.

Correction de l'exercice 16

- a. La droite coupe la courbe **quatre** fois : deux fois par période.
- b. $\sin X = \frac{1}{2}$ avec $X = 500\pi t$ dans $[0; 4\pi[$ (deux tours). Solutions : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, puis $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$. En divisant par 500π : $t = \frac{1}{3000}$, $\frac{5}{3000}$, $\frac{13}{3000}$, $\frac{17}{3000}$ s, soit environ 0,33 ms, 1,67 ms, 4,33 ms et 5,67 ms. Les deux dernières sont les deux premières décalées d'une période, 4 ms.

Exercice 17 — Une solution oubliée

Pour résoudre $2 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}) = 1$ sur $[0; 0,02 \text{ s}]$, Sami écrit : « $100\pi t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$, donc $t = \frac{1}{150}$ s. C'est la seule solution. »

- a. Vérifier que $t = \frac{1}{150}$ s est bien une solution.
- b. Sami a-t-il raison de dire que c'est la seule ? Compléter sa réponse.

Correction de l'exercice 17

- a. $100\pi \times \frac{1}{150} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$: c'est bien une solution. Mais le calcul de Sami s'arrête à la première valeur.
- b. Non. $X = 100\pi t - \frac{\pi}{2}$ parcourt $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ et $\sin X = \frac{1}{2}$ a deux solutions dans cet intervalle : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. La seconde donne $t = \frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}}{100\pi} = \frac{1}{75}$ s $\approx 13,33$ ms. Solutions : $\approx 6,67$ ms et $\approx 13,33$ ms.

C4 – Établir des liens entre le vecteur de Fresnel d'une tension ou d'une intensité sinusoïdale de la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$ et la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a \sin(\omega t + \varphi)$

Exigible. Prérequis : C2.

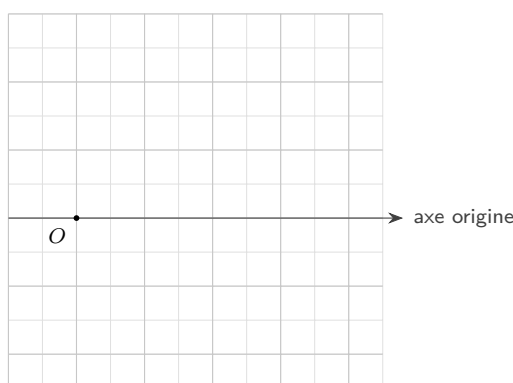
Rappel de cours

Le **vecteur de Fresnel** de $a \sin(\omega t + \varphi)$ a pour longueur a (à l'échelle) et fait l'angle φ avec l'axe origine des phases (sens inverse des aiguilles d'une montre si $\varphi > 0$). La hauteur de son extrémité est $u(0)$; il tourne d'un tour par période.

Deux grandeurs de même fréquence : l'angle entre leurs vecteurs est le **déphasage** ; sur les courbes, il vaut $2\pi \frac{\Delta t}{T}$, et la grandeur dont le sommet arrive en premier est en avance.

Exercice 18 — Tracer deux vecteurs de Fresnel

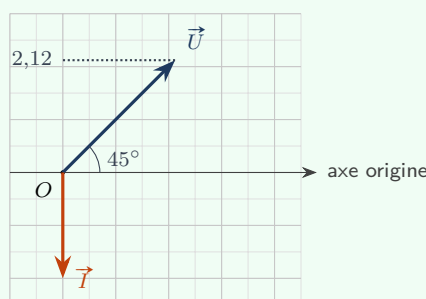
On considère $u(t) = 3 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$, en volts, et $i(t) = 2 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})$, en ampères.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases horizontal, quadrillage de 5 mm. Échelles imposées : 1 cm pour 1 V et 1 cm pour 1 A.

- Tracer les vecteurs de Fresnel $\vec{U}$ et $\vec{I}$.
- Calculer $u(0)$ et $i(0)$; les repérer sur la figure.
- Le déphasage de i par rapport à u : combien vaut-il ? Quelle grandeur est en avance ?

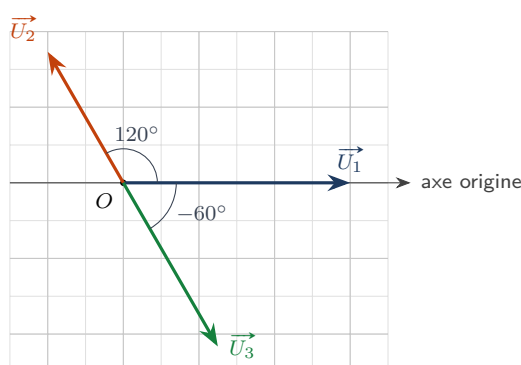
Correction de l'exercice 18



- $\vec{U}$: 3 cm à 45° au-dessus de l'axe. $\vec{I}$: 2 cm vers le bas, à 90° sous l'axe.
- $u(0) = 3 \sin \frac{\pi}{4} \approx 2,12$ V (hauteur de l'extrémité de $\vec{U}$) ; $i(0) = 2 \sin(-\frac{\pi}{2}) = -2$ A : l'intensité part de son creux.
- $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$: i est en **retard** de $\frac{3\pi}{4}$ (135°) sur u ; u est en avance.

Exercice 19 — Lire trois vecteurs de Fresnel

Les trois vecteurs ci-dessous représentent trois tensions de pulsation 100π , à l'échelle 1 cm pour 10 V.

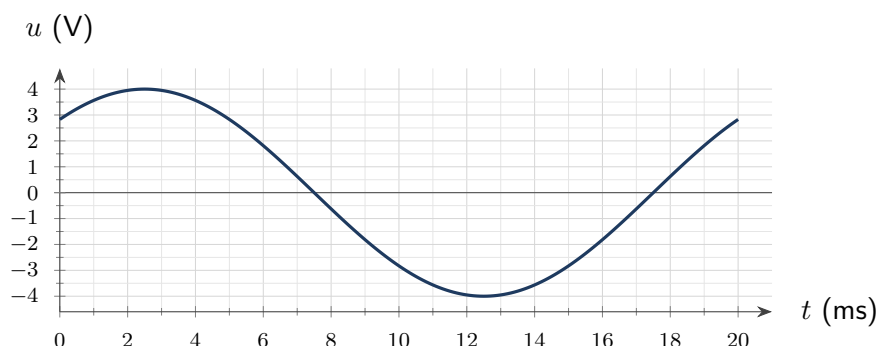


Trois vecteurs de Fresnel à l'instant $t = 0$, de même origine O : $\vec{U}_1$ mesure 3 cm sur l'axe, $\vec{U}_2$ 2 cm à 120° au-dessus de l'axe, $\vec{U}_3$ 2,5 cm à 60° sous l'axe.

- Écrire $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.
- Pour chacune, dire si la courbe part au-dessus ou au-dessous de l'axe, en montant ou en descendant.

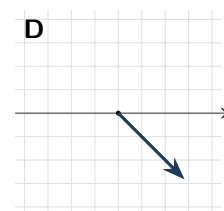
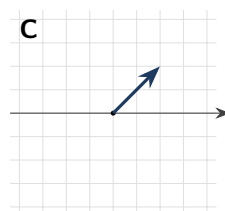
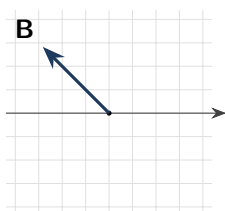
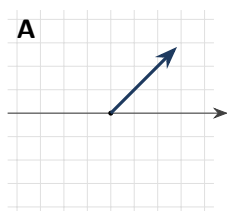
Correction de l'exercice 19

- $u_1(t) = 30 \sin(100\pi t)$; $u_2(t) = 20 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$; $u_3(t) = 25 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.
- u_1 : part de 0 en montant. u_2 : $u_2(0) = 20 \sin \frac{2\pi}{3} \approx 17,3$ V, au-dessus de l'axe, en descendant ($\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$).
 u_3 : $u_3(0) = 25 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \approx -21,7$ V, au-dessous de l'axe, en montant ($-\frac{\pi}{3}$ est dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$).

Exercice 20 — Quel vecteur pour cette courbe ?

Tension u en fonction du temps : temps en millisecondes, tension en volts ; quadrillage de pas 1 ms et 0,5 V.

Parmi les quatre vecteurs ci-dessous, où un carreau du quadrillage représente 1 V, lequel est le vecteur de Fresnel de u ? Justifier en écartant les trois autres.



Quatre vecteurs de même origine, à $t = 0$, sur un quadrillage de même pas que le cadre de construction. A : longueur 4 carreaux, 45° au-dessus de l'axe. B : 4 carreaux, 135° . C : un peu moins de 3 carreaux, 45° . D : 4 carreaux, 45° sous l'axe.

Correction de l'exercice 20

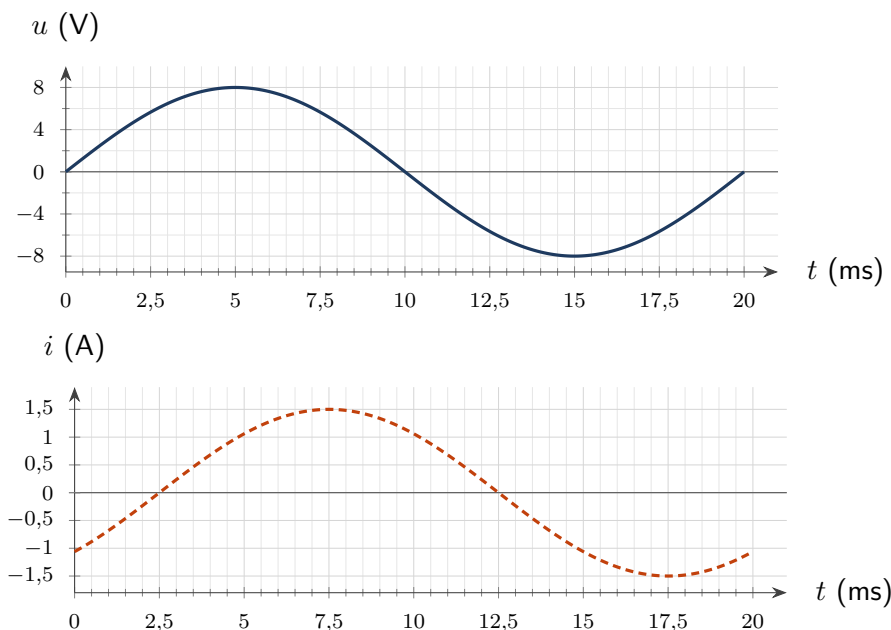
Sur la courbe : $a = 4 \text{ V}$; $u(0) \approx 2,8 \text{ V}$; la courbe part en **montant**. $\sin \varphi = \frac{2,8}{4} \approx 0,71 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$; elle monte, donc $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Vecteur A : longueur 4 carreaux, soit 4 V, et angle 45° . C'est lui.

B a la bonne longueur, mais à 135° la courbe partirait de 2,8 V en *descendant*. C a le bon angle, mais sa longueur ne représente que 2,8 V : c'est $u(0)$, pas l'amplitude. D donnerait $u(0) \approx -2,8 \text{ V}$, sous l'axe.

Exercice 21 — Tension et intensité décalées

Les relevés ci-dessous donnent, sur le même intervalle de temps, la tension u aux bornes d'un appareil et l'intensité i du courant qui le traverse.



Deux relevés alignés sur le même axe des temps, en millisecondes (quadrillage de pas 0,5 ms) : en haut la tension u en volts, en bas l'intensité i en ampères.

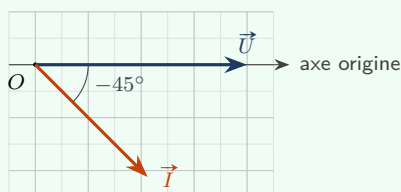
- Lire les amplitudes et la période commune.
- Lire les instants du premier sommet de u et de i . Laquelle des deux grandeurs est en retard ? Calculer le déphasage de i par rapport à u .
- Écrire $u(t)$ et $i(t)$, puis tracer leurs vecteurs de Fresnel sur une même figure, aux échelles 1 cm pour 2 V et 1 cm pour 0,5 A.

Correction de l'exercice 21

a. $U_{\max} = 8 \text{ V}$, $I_{\max} = 1,5 \text{ A}$, $T = 20 \text{ ms}$.

b. Sommet de u à 5 ms, sommet de i à 7,5 ms : i est en **retard**, $\Delta t = 2,5 \text{ ms}$. Déphasage : $-2\pi \times \frac{2,5}{20} = -\frac{\pi}{4}$ (-45°).

c. $u(t) = 8 \sin(100\pi t)$; $i(t) = 1,5 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$.



$\vec{U}$: 4 cm sur l'axe ; $\vec{I}$: 3 cm à 45° sous l'axe. L'angle entre les vecteurs est le déphasage.

Exercice 22 — Vrai ou faux ?

On considère $i(t) = 2 \sin\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$, en ampères. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier.

- Son vecteur de Fresnel est dirigé vers le haut et vers la droite.
- Sa courbe part au-dessous de l'axe horizontal.
- Sa courbe part en montant.
- Sa période vaut 20 ms.

Correction de l'exercice 22

- Faux : $-\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$, le vecteur est tourné de 120° sous l'axe, vers le bas et vers la gauche.
- Vrai : $i(0) = 2 \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \approx -1,73 \text{ A}$.
- Faux : $-\frac{2\pi}{3} < -\frac{\pi}{2}$, la courbe part en descendant (elle va vers son creux, -2 A).
- Vrai : $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s}$.

C5 – Ajouter ou soustraire deux tensions ou intensités sinusoïdales de même fréquence à l'aide de leurs vecteurs de Fresnel

Objectif du module (outil à découvrir). Prérequis : C4, somme de deux vecteurs.

Rappel de cours

Le vecteur de Fresnel de $u_1 + u_2$ est $\vec{U}_1 + \vec{U}_2$ (vecteurs mis bout à bout) ; celui de $u_1 - u_2$ est $\vec{U}_1 + (-\vec{U}_2)$. On mesure la longueur (amplitude) et l'angle (phase).

Calculs directs : en phase, $a = a_1 + a_2$; en opposition, $a = |a_1 - a_2|$; en quadrature, $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ et l'angle par la tangente.

Exercice 23 — En phase et en opposition

On considère trois intensités, en ampères :

$$i_1(t) = 3 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad i_2(t) = \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad i_3(t) = \sin\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

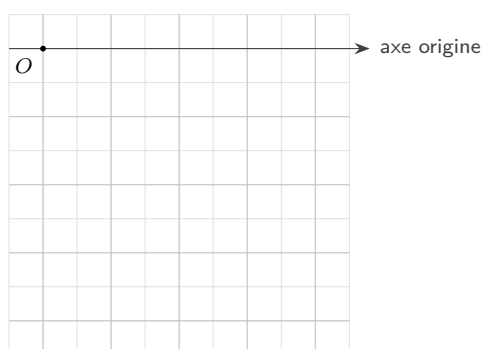
- Comparer les vecteurs de Fresnel de i_2 et de i_3 .
- Écrire $i_1 + i_2$ puis $i_1 + i_3$ sous la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$.

Correction de l'exercice 23

- Même longueur, 1, et angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$, qui diffèrent de π : les vecteurs sont **opposés**. $i_3 = -i_2$.
- $\vec{I}_1$ et $\vec{I}_2$ ont même direction et même sens : $i_1 + i_2 = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. $\vec{I}_3$ est de sens contraire : les longueurs se retranchent, $i_1 + i_3 = 2 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

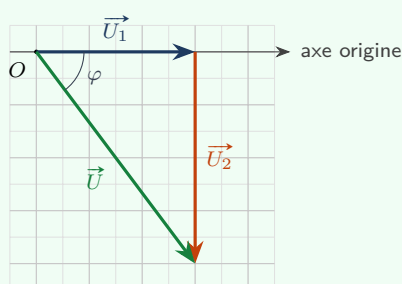
Exercice 24 — Construire puis calculer

On considère $u_1(t) = 6 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 8 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})$, en volts.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases, quadrillage de 5 mm. Échelle imposée : 1 cm pour 2 V.

- Construire $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$. Mesurer la longueur et l'angle de $\vec{U}$.
- Retrouver par le calcul l'amplitude et la phase de $u = u_1 + u_2$. Écrire $u(t)$.

Correction de l'exercice 24

- $\vec{U}_1$: 3 cm ; $\vec{U}_2$: 4 cm vers le bas, au bout de $\vec{U}_1$. On mesure $\vec{U}$: environ 5 cm, à environ 53° sous l'axe.
- Quadrature : $a = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ V. $\tan |\varphi| = \frac{8}{6}$, donc $|\varphi| \approx 0,927$ rad ; le vecteur est sous l'axe : $\varphi \approx -0,93$ rad ($-53,1^\circ$). $u(t) \approx 10 \sin(100\pi t - 0,93)$.

Exercice 25 — Une somme qui ne se calcule pas simplement

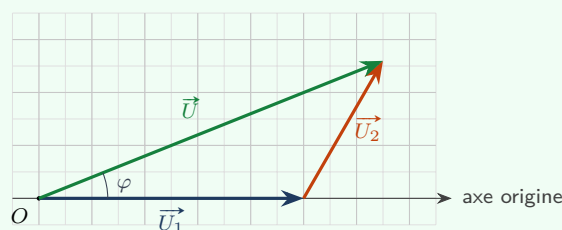
On considère $u_1(t) = 5 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 3 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$, en volts. Les deux tensions ne sont ni en phase, ni en opposition, ni en quadrature.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases, quadrillage de 5 mm. Échelle imposée : 1 cm pour 1 V.

- Construire $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ avec soin (règle et rapporteur).
- Mesurer l'amplitude et la phase de $u = u_1 + u_2$; écrire une expression approchée de $u(t)$.

Correction de l'exercice 25



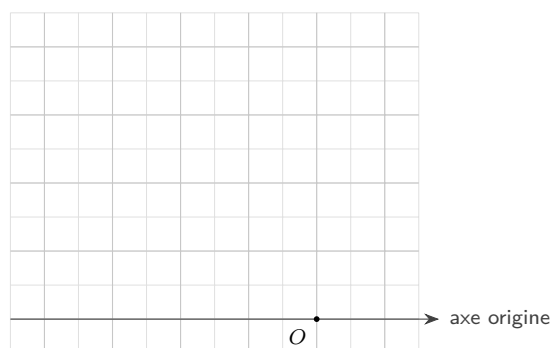
a. $\vec{U}_1$: 5 cm sur l'axe ; au bout, $\vec{U}_2$: 3 cm à 60° au-dessus de l'horizontale.

b. On mesure environ 7,0 cm et environ 22° : $u(t) \approx 7 \sin(100\pi t + 0,38)$ (car $22^\circ \approx 0,38$ rad).

Pour le professeur : le calcul par projection (encadré « Aller plus loin » du cours) donne exactement $a = 7$ ($X = 6,5$, $Y \approx 2,598$, $X^2 + Y^2 = 49$) et $\varphi \approx 0,380$ rad ($21,8^\circ$). Accepter 6,9 à 7,1 cm et 20° à 24° .

Exercice 26 — Une différence d'intensités

On considère $i_1(t) = 4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ et $i_2(t) = 4 \sin(100\pi t)$, en ampères.



Cadre de construction : origine O , axe origine des phases, quadrillage de 5 mm. Échelle imposée : 1 cm pour 1 A.

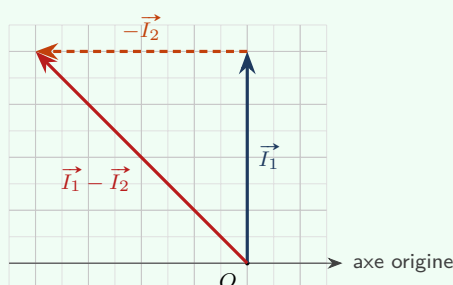
a. Quel est l'angle du vecteur $-\vec{I}_2$?

b. Construire $\vec{I}_1 - \vec{I}_2$.

c. Calculer l'amplitude et la phase de $i_1 - i_2$; écrire son expression.

Correction de l'exercice 26

a. $\vec{I}_2$ est sur l'axe (angle 0) ; $-\vec{I}_2$ a l'angle π : il pointe vers la gauche.



b. Au bout de $\vec{I}_1$ (4 cm vers le haut), on trace $-\vec{I}_2$ (4 cm vers la gauche).

c. Triangle rectangle isocèle : $a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$ A ; le vecteur est sur la bissectrice, à 135° de l'axe : $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. $i_1 - i_2 \approx 5,66 \sin(100\pi t + \frac{3\pi}{4})$.

Exercice 27 — Deux appareils en série

Deux appareils sont branchés en série : la tension totale est la somme $u = u_1 + u_2$ des tensions à leurs bornes. On relève $u_1(t) = 12 \sin(100\pi t)$ et $u_2(t) = 9 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$, en volts. Un élève affirme : « la tension totale atteint $12 + 9 = 21 \text{ V}$ ».

- A-t-il raison ? Calculer l'amplitude et la phase de u .
- Dans quel cas son calcul aurait-il été juste ?

Correction de l'exercice 27

- Non. Les deux tensions sont en quadrature : leurs vecteurs sont perpendiculaires. $a = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ V}$; $\tan \varphi = \frac{9}{12} = 0,75$, $\varphi \approx 0,644 \text{ rad}$ ($36,9^\circ$). $u(t) \approx 15 \sin(100\pi t + 0,64)$: la tension totale ne dépasse jamais 15 V .
- Seulement si les deux tensions étaient **en phase** : leurs vecteurs auraient la même direction et le même sens, et les amplitudes s'ajouteraient.

Exercice 28 — Aller plus loin – Le calcul par projection

On considère $u_1(t) = 4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$ et $u_2(t) = 3 \sin(100\pi t + \frac{3\pi}{4})$, en volts. On utilise la méthode de l'encadré « Aller plus loin » du cours, qui n'est pas exigible.

- Calculer les coordonnées $X = 4 \cos \frac{\pi}{6} + 3 \cos \frac{3\pi}{4}$ et $Y = 4 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \sin \frac{3\pi}{4}$ du vecteur $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$, au millième.
- En déduire l'amplitude $a = \sqrt{X^2 + Y^2}$, puis la phase φ en résolvant $\cos \varphi = \frac{X}{a}$ sur $] -\pi ; \pi]$ et en tenant compte du signe de Y .
- Écrire une expression approchée de $u_1 + u_2$.

Correction de l'exercice 28

- $X = 4 \times 0,8660 + 3 \times (-0,7071) \approx 3,464 - 2,121 \approx 1,343$; $Y = 4 \times 0,5 + 3 \times 0,7071 \approx 2 + 2,121 \approx 4,121$.
- $a = \sqrt{1,343^2 + 4,121^2} \approx \sqrt{18,79} \approx 4,33 \text{ V}$. $\cos \varphi = \frac{1,343}{4,335} \approx 0,310$: $\varphi \approx \pm 1,256$; $Y > 0$, le vecteur est au-dessus de l'axe : $\varphi \approx 1,26 \text{ rad}$ (72°).
- $u_1 + u_2 \approx 4,33 \sin(100\pi t + 1,26)$. Contrôle possible par une construction à l'échelle.