

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 6

Vecteurs dans l'espace

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Ce chapitre traite le module « **Vecteurs dans l'espace** » du programme de Terminale, propre au **groupe B**. Il prolonge les vecteurs du plan vus en Première : il faut savoir calculer les coordonnées d'un vecteur (arrivée moins départ), reconnaître des vecteurs égaux ou colinéaires dans le plan, et utiliser le théorème de Pythagore. Le pavé droit, vu en Première, sert de support à toutes les figures. Calculatrice, règle et crayons de couleur sont nécessaires.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
Repérage – Coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace	§1	2 él. 2
C1 – Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans l'espace muni d'un repère orthonormé	§2	3 él. 3
C2 – Représenter, dans l'espace muni d'un repère orthonormé, un vecteur dont les coordonnées sont données	§3	5 él. 5
C3 – Calculer la norme d'un vecteur dans l'espace muni d'un repère orthonormé	§4	7 él. 6
C4 – Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs dans l'espace muni d'un repère orthonormé	§5	8 él. 8
C5 – Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées, des vecteurs égaux ou colinéaires dans l'espace muni d'un repère orthonormé	§6 et §7	10 él. 9
C3 à C5 – Bivalence : des forces dans l'espace	§8	12 él. 12
Aller plus loin – Milieu d'un segment	§9	14 él. 13

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Toutes les figures sont en **perspective cavalière** : l'axe (Ox) est horizontal, l'axe (Oz) vertical, tous deux en vraie grandeur ; l'axe (Oy) part vers le fond, à 45° , et ses longueurs sont dessinées réduites de moitié.

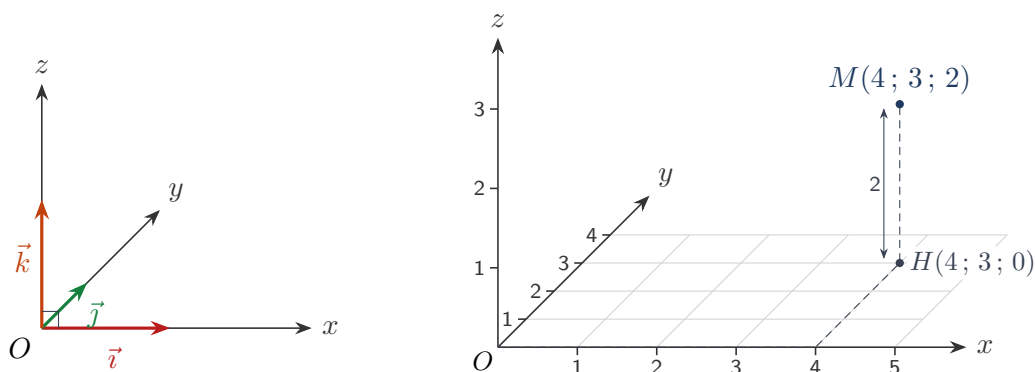
1 Se repérer dans l'espace

Définition — Repère orthonormé de l'espace

Un **repère orthonormé** de l'espace est formé d'un point O , l'**origine**, et de trois axes (Ox) , (Oy) et (Oz) **perpendiculaires deux à deux**, gradués avec la **même unité**. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ont pour longueur une unité.

Tout point M de l'espace est repéré par **trois nombres**, ses **coordonnées** cartésiennes : l'**abscisse** x , l'**ordonnée** y et la **cote** z . On écrit $M(x; y; z)$.

Pour atteindre M depuis O : avancer de x parallèlement à (Ox) , puis de y parallèlement à (Oy) , puis de z parallèlement à (Oz) . Un nombre négatif fait aller dans le sens contraire de l'axe.



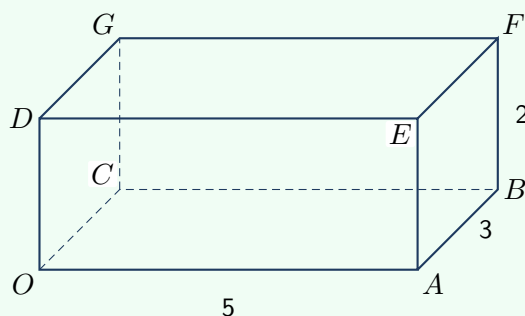
À gauche : le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, vu en perspective cavalière ; les trois axes sont perpendiculaires deux à deux. À droite : le sol quadrillé est le plan horizontal (xOy) . Pour placer $M(4; 3; 2)$, on avance de 4 selon (Ox) , de 3 parallèlement à (Oy) jusqu'au point H du sol, puis on monte de 2 à la verticale de H .

Erreur fréquente — Lire une cote en la comparant à l'axe (Oz)

Sur la figure, M semble à la hauteur de la graduation 3 de l'axe (Oz) . C'est une illusion de la perspective : M est à **2 unités au-dessus du point H** du sol. La cote se lit toujours à partir du sol, à la verticale du point, jamais en comparant avec l'axe (Oz) .

Exemple — Les huit sommets d'une caisse de rangement

Une caisse a la forme d'un pavé droit de 50 cm de large, 30 cm de profondeur et 20 cm de haut. On choisit l'origine O au coin avant gauche du dessous de la caisse et l'unité 1 dm.



Pavé $OABCDEFG$ vu de face, légèrement de dessus. Arêtes cachées en tirets. $OA = 5$, $OC = 3$, $OD = 2$ (en décimètres).

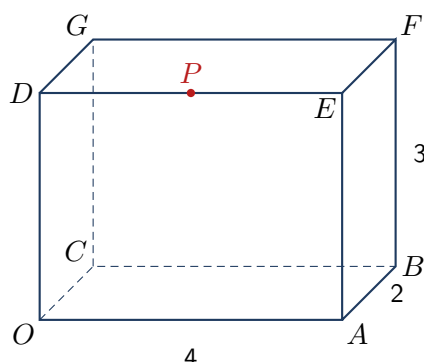
Sol ($z = 0$) : $O(0; 0; 0)$ $A(5; 0; 0)$ $B(5; 3; 0)$ $C(0; 3; 0)$

Dessus ($z = 2$) : $D(0; 0; 2)$ $E(5; 0; 2)$ $F(5; 3; 2)$ $G(0; 3; 2)$

Tous les points du dessous ont une cote nulle, tous ceux du dessus une cote égale à 2. Les points de la face de devant ont une ordonnée nulle.

Application 1 – Les coins d'un caisson mural

Un caisson mural est un pavé droit de 40 cm de large, 20 cm de profondeur et 30 cm de haut. Unité : 1 dm.



Caisson $OABCDEFG$, mêmes notations que dans l'exemple. P est le milieu de l'arête $[DE]$, où l'on fixe une poignée.

- Donner les coordonnées des points A , E , F et G .
- Donner les coordonnées de la poignée P .
- Quel sommet a pour coordonnées $(4; 2; 0)$? Et $(0; 2; 0)$?

Correction — Application 1

- $A(4; 0; 0)$ $E(4; 0; 3)$ $F(4; 2; 3)$ $G(0; 2; 3)$.
- P est au milieu de l'arête de devant du dessus : $x = 2$, $y = 0$, $z = 3$, donc $P(2; 0; 3)$.
- $(4; 2; 0)$: c'est B . $(0; 2; 0)$: c'est C , le sommet caché.

Conduite : faire dire pour chaque point sur quelle face il se trouve (sol, dessus, devant) avant d'écrire ses coordonnées. Le sommet caché C est celui qui pose problème : on le retrouve en suivant les arêtes en tirets.

2 Coordonnées d'un vecteur (C1)**Définition — Coordonnées d'un vecteur**

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Arrivée moins départ, coordonnée par coordonnée. Ces trois nombres sont les **déplacements** à effectuer parallèlement à (Ox) , à (Oy) et à (Oz) pour aller de A à B : positifs dans le sens de l'axe, négatifs dans le sens contraire.

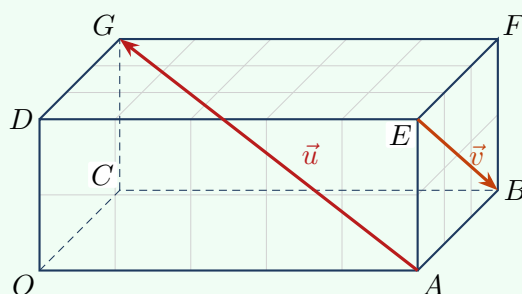
On écrit aussi les coordonnées en ligne : $\vec{u}(x; y; z)$.

Méthode — Lire graphiquement les coordonnées d'un vecteur

- Repérer l'origine et l'extrémité de la flèche.
- Compter, en suivant les arêtes ou le quadrillage, le déplacement parallèle à (Ox) , puis à (Oy) , puis à (Oz) .
- Mettre un signe moins quand on va dans le sens contraire de l'axe.
- Contrôler par le calcul « arrivée moins départ ».

Exemple — Deux flèches sur la caisse de rangement

On reprend la caisse de l'exemple du §1.



Caisse $OABCDEFG$ ($OA = 5$, $OC = 3$, $OD = 2$), faces vues quadrillées : une maille vaut une unité. $\vec{u}$ va de A à G ; $\vec{v}$ va de E à B .

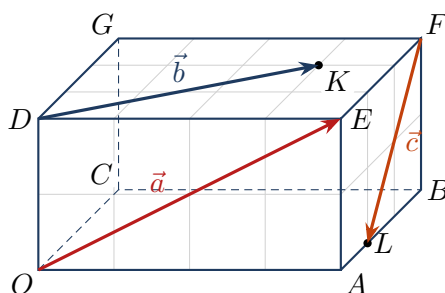
$\vec{u} = \overrightarrow{AG}$: de A à G , on recule de 5 selon (Ox) , on avance de 3 selon (Oy) et on monte de 2. Donc $\vec{u}(-5; 3; 2)$. Contrôle avec $A(5; 0; 0)$ et $G(0; 3; 2)$:

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 0 - 5 \\ 3 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\vec{v} = \overrightarrow{EB}$: aucun déplacement selon (Ox) , 3 vers le fond, 2 vers le bas. Donc $\vec{v}(0; 3; -2)$.

Erreur fréquente — Calculer « départ moins arrivée »

$A - B$ au lieu de $B - A$ donne les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$, le vecteur **opposé** : tous les signes sont inversés. Réflexe : un vecteur qui « recule » selon (Ox) a une abscisse négative.

Application 2 – Lire trois vecteurs sur un pavé quadrillé

Pavé $OABCDEFG$ quadrillé : $OA = 4$, $OC = 3$, $OD = 2$. K est sur le dessus, L sur l'arête $[AB]$. $\vec{a} = \overrightarrow{OE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DK}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FL}$.

Lire sur la figure les coordonnées de $\vec{a}$, de $\vec{b}$ et de $\vec{c}$, puis contrôler par le calcul.

Correction — Application 2

$\vec{a} = \overrightarrow{OE}$: 4 selon (Ox) , 0 selon (Oy) , 2 vers le haut : $\vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{b} = \overrightarrow{DK}$ avec $D(0; 0; 2)$ et $K(3; 2; 2)$: $\vec{b} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le déplacement reste sur le dessus : cote nulle.

$\vec{c} = \overrightarrow{FL}$ avec $F(4; 3; 2)$ et $L(4; 1; 0)$: $\vec{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On revient vers l'avant et on descend : deux coordonnées négatives.

Conduite : exiger le contrôle par le calcul ; il oblige à lire les coordonnées de K et de L , et fait apparaître les zéros.

Application 3 – Calculer les coordonnées d'un vecteur

On donne $A(2; -1; 3)$, $B(5; 1; -2)$, $C(-1; 4; 0)$ et $D(1; 0; 6)$.

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BA}$.
- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$.
- Le point E vérifie $\overrightarrow{AE}(1; 2; -3)$. Trouver les coordonnées de E .

Correction — Application 3

a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-(-1) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$: les signes sont tous inversés.

b. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 0-4 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

c. $x_E - 2 = 1$, $y_E - (-1) = 2$, $z_E - 3 = -3$, donc $E(3; 1; 0)$.

Erreur visée : $1 - (-1)$ calculé comme 0. Faire écrire la parenthèse.

3 Représenter un vecteur (C2)

Définition — Représentant d'un vecteur

Un vecteur n'est pas attaché à un point : il a une infinité de **représentants**, des flèches parallèles, de même sens et de même longueur. Représenter $\vec{u}(x; y; z)$ à partir d'un point A , c'est tracer la flèche de A jusqu'au point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, c'est-à-dire

$$x_B = x_A + x \quad y_B = y_A + y \quad z_B = z_A + z.$$

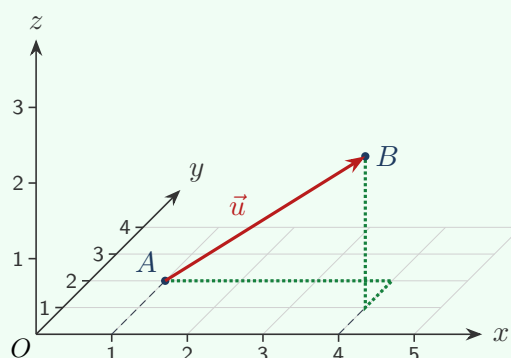
Méthode — Représenter un vecteur de coordonnées données

- Calculer les coordonnées de l'extrémité B en ajoutant celles de $\vec{u}$ à celles de A .
- Placer A et B comme au §1 : chemin au sol, puis verticale.
- Tracer la flèche de A vers B .

Autre geste possible : depuis A , se déplacer de x parallèlement à (Ox) , de y parallèlement à (Oy) , puis de z verticalement. Sur la verticale, une unité vaut 1 cm ; selon (Oy) , on suit le quadrillage du sol.

Exemple — Représenter $\vec{u}(3; -1; 2)$ à partir de $A(1; 2; 0)$

L'extrémité est $B(1+3; 2+(-1); 0+2) = (4; 1; 2)$.



A est au sol. En pointillés gris : les chemins au sol qui placent A et le pied de B . En pointillés verts : le chemin « +3 selon (Ox) , -1 selon (Oy) , $+2$ vers le haut » depuis A . Il aboutit au point $B(4; 1; 2)$, placé aussi par son chemin depuis O .

Erreur fréquente — Prendre les coordonnées du vecteur pour celles de l'extrémité

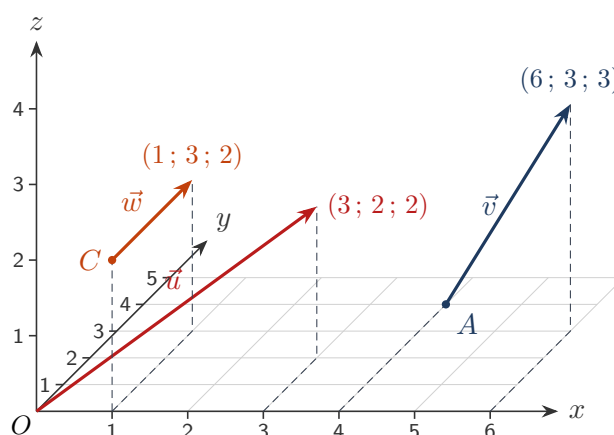
Tracer la flèche de A jusqu'au point $(3; -1; 2)$ est faux : ce point est l'extrémité du représentant qui part de O , pas de celui qui part de A . On ajoute toujours les coordonnées de $\vec{u}$ à celles du point de départ.

Application 4 – Représenter trois vecteurs

Dans le repère ci-dessous (unité 1 cm sur (Ox) et sur (Oz)), représenter :

- $\vec{u}(3; 2; 2)$ à partir de l'origine O ;
- $\vec{v}(2; -1; 3)$ à partir du point $A(4; 4; 0)$;
- $\vec{w}(0; 3; 0)$ à partir du point $C(1; 0; 2)$.

Écrire à côté de chaque flèche les coordonnées de son extrémité.



Repère orthonormé, sol (xOy) quadrillé. Une unité vaut 1 cm sur (Ox) et sur (Oz) ; selon (Oy) , elle vaut une maille du quadrillage.

Correction — Application 4

- Depuis O , l'extrémité est $(3; 2; 2)$.
- $B(4+2; 4-1; 0+3) = (6; 3; 3)$: depuis A , deux unités vers la droite, une maille vers l'avant, puis 3 cm vers le haut.
- $(1; 3; 2)$: la flèche est parallèle à (Oy) , à la hauteur 2.

Conduite : la figure ci-dessus est la figure attendue. Contrôler que chaque extrémité est placée par son chemin au sol puis sa verticale ; une flèche « à main levée » vers le bon endroit apparent est presque toujours fautive en perspective.

4 Norme d'un vecteur (C3)

Définition — Norme d'un vecteur

La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la **longueur** d'un de ses représentants. En particulier, $\|\vec{AB}\| = AB$, la distance entre A et B .

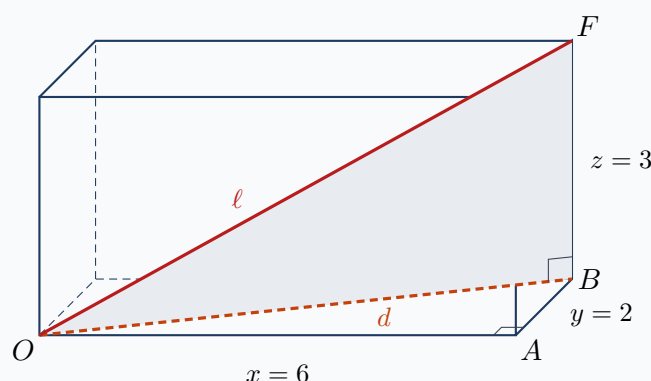
Proposition — Norme dans un repère orthonormé

Si $\vec{u}(x; y; z)$, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pour deux points : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Remarque — D'où vient la formule ? Pythagore deux fois



Pavé de dimensions 6, 2 et 3. Le triangle $OB F$, teinté, est rectangle en B : l'arête $[BF]$ est verticale et $[OB]$ est au sol. Le triangle OAB , au sol, est rectangle en A .

Au sol, dans le triangle OAB rectangle en A : $d^2 = OB^2 = 6^2 + 2^2 = 40$.

Dans le triangle $OB F$ rectangle en B : $\ell^2 = OF^2 = d^2 + 3^2 = 6^2 + 2^2 + 3^2 = 49$, donc $\ell = 7$.

La diagonale du pavé a pour longueur $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: c'est la norme de $\vec{OF} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemple — Deux calculs de norme

$\vec{u}(1; -4; 8)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$.

$A(1; 2; -1)$ et $B(3; 0; 0)$: $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $AB = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$.

Erreur fréquente — Le carré d'un nombre négatif

$(-4)^2 = 16$ et non -16 . À la calculatrice, taper les parenthèses : $(-4)^2$. Une norme est **toujours positive ou nulle**, même si toutes les coordonnées sont négatives. Et $\|\vec{u}\|$ n'est pas $x + y + z$: pour $\vec{u}(1; -4; 8)$, $1 - 4 + 8 = 5$ alors que la norme vaut 9.

Application 5 – Normes et distances

- a. Calculer la norme de $\vec{u}(4; -4; 7)$, de $\vec{v}(1; 2; -2)$, de $\vec{w}(0; -5; 0)$ et de $\vec{t}(2; 1; -3)$ (arrondir au centième si nécessaire).
- b. Calculer la distance AB pour $A(2; -1; 0)$ et $B(5; 3; 12)$.
- c. Une corde est tendue en ligne droite entre le sommet $S(1; 0; 3)$ d'un mât et un piquet $P(3; 6; 0)$ planté au sol (unité : le mètre). Quelle est sa longueur ?

Correction — Application 5

a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$; $\|\vec{w}\| = \sqrt{25} = 5$;
 $\|\vec{t}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3,74$.

b. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

c. $\overrightarrow{SP} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $SP = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$ m.

Conduite : pour $\vec{w}$, faire remarquer qu'un vecteur parallèle à un axe a pour norme la valeur absolue de sa seule coordonnée non nulle.

5 Somme de deux vecteurs (C4)**Définition — Somme de deux vecteurs**

Le vecteur **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ représente le déplacement $\vec{u}$ **suivi** du déplacement $\vec{v}$. Mis bout à bout, deux vecteurs vérifient la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Proposition — Coordonnées de la somme

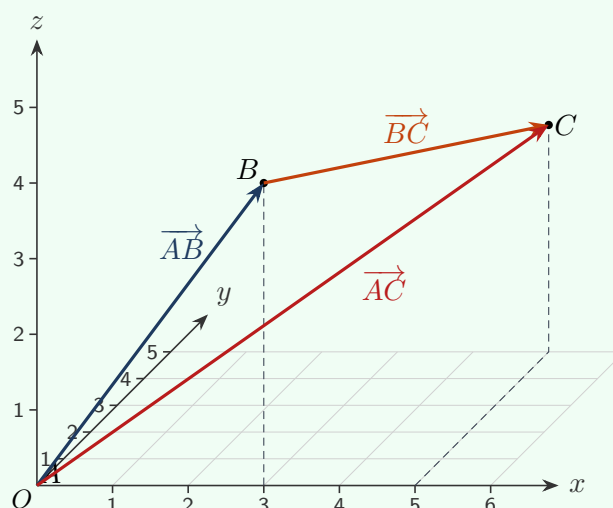
Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}.$$

On additionne coordonnée par coordonnée.

Exemple — Le trajet d'un drone

Un drone décolle de A , placé à l'origine. Il effectue le déplacement $\overrightarrow{AB}(3; 0; 4)$, puis le déplacement $\overrightarrow{BC}(2; 5; -1)$ (en mètres).



Repère orthonormé, unité le mètre ; A est à l'origine. En bleu puis en orange, les deux déplacements successifs ; en rouge, le déplacement total. Les pointillés placent B et C depuis le sol.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 0 + 5 \\ 4 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Contrôle : B(3 ; 0 ; 4) et C(5 ; 5 ; 3) ; « arrivée moins départ » donne bien $\overrightarrow{AC}(5 ; 5 ; 3)$.

Erreur fréquente — La longueur du trajet n'est pas la norme de la somme

Le drone parcourt $AB + BC = 5 + \sqrt{30} \approx 10,48$ m, mais il ne se trouve qu'à $AC = \sqrt{59} \approx 7,68$ m de son point de départ. On additionne les **coordonnées**, jamais les normes.

Application 6 – Additionner des vecteurs

- Calculer $\vec{u} + \vec{v}$ pour $\vec{u}(2 ; -1 ; 4)$ et $\vec{v}(-5 ; 3 ; 1)$.
- On donne A(1 ; 2 ; 0), B(4 ; 0 ; 3) et C(2 ; 5 ; 5). Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Comparer avec $\overrightarrow{AC}$.
- Le crochet d'une grue se déplace de $\vec{u}(6 ; 0 ; 0)$ puis de $\vec{v}(0 ; -4 ; 3)$ (en mètres). Calculer le déplacement total, puis la distance entre les positions de départ et d'arrivée. Quelle longueur de trajet le crochet a-t-il parcourue ?

Correction — Application 6

- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ -1 + 3 \\ 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$ Et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$: c'est la relation de Chasles.
- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; distance $\sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61} \approx 7,81$ m. Trajet : $6 + \sqrt{16 + 9} = 6 + 5 = 11$ m.

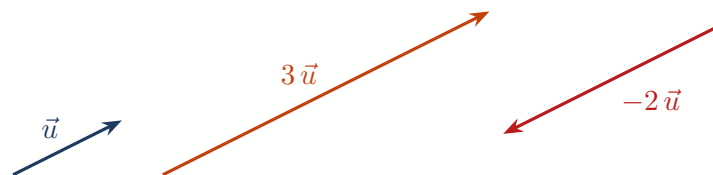
6 Produit d'un vecteur par un réel

Définition — Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées

$$k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}.$$

Il a la **même direction** que $\vec{u}$; le **même sens** si $k > 0$, le sens **contraire** si $k < 0$; sa norme est celle de $\vec{u}$ multipliée par la valeur absolue de k . Pour $k = -1$, on obtient l'**opposé** $-\vec{u}$: par exemple $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



Trois représentants sur des droites parallèles : $3\vec{u}$ garde le sens de $\vec{u}$ et est trois fois plus long ; $-2\vec{u}$ est deux fois plus long et de sens contraire.

Exemple — Multiplier $\vec{u}(2; -1; 3)$

$$3\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad -2\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad 0,5\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Normes : $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$ et $\|3\vec{u}\| = \sqrt{36 + 9 + 81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$, trois fois plus.

Application 7 – Multiplier un vecteur

On donne $\vec{u}(2; -1; 2)$.

- Calculer les coordonnées de $3\vec{u}$, de $-\vec{u}$ et de $0,5\vec{u}$.
- Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|-\vec{u}\|$. Que constate-t-on ?
- Trouver le réel k tel que $\vec{v}(-8; 4; -8)$ soit égal à $k\vec{u}$.

Correction — Application 7

$$\text{a. } 3\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad -\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \quad 0,5\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b. } \|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3. \quad -2\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \|-2\vec{u}\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6 : \text{ la norme est multipliée par 2,}$$

pas par -2 ; une norme n'est jamais négative.

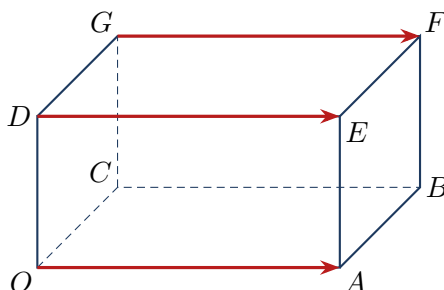
- $-8 = k \times 2$ donne $k = -4$; on vérifie : $-4 \times (-1) = 4$ et $-4 \times 2 = -8$. Donc $\vec{v} = -4\vec{u}$.

7 Vecteurs égaux, vecteurs colinéaires (C5)

Définition — Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme. Dans un repère, c'est le cas si et seulement s'ils ont les **mêmes trois coordonnées**.

Quatre points : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).



Sur un pavé $OABCDEFG$, les arêtes parallèles parcourues dans le même sens donnent des vecteurs égaux : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF}$ (en rouge), et aussi $\overrightarrow{CB}$, sur l'arête cachée.

Définition — Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$: ils ont la même direction. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Points alignés, droites parallèles. A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Méthode — Reconnaître des vecteurs colinéaires avec leurs coordonnées

1. Chercher le nombre k qui transforme une coordonnée non nulle de $\vec{u}$ en la coordonnée correspondante de $\vec{v}$: $k = \frac{x'}{x}$. 2. Vérifier que **le même** k convient pour **les trois** coordonnées. 3. Conclure : un même k partout, les vecteurs sont colinéaires et $\vec{v} = k\vec{u}$; un seul désaccord, ils ne le sont pas.

Si une coordonnée de $\vec{u}$ est nulle, celle de $\vec{v}$ doit l'être aussi.

Exemple — Trois tests

$\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(-6; 3; -9)$: $\frac{-6}{2} = -3$, $\frac{3}{-1} = -3$, $\frac{-9}{3} = -3$. Colinéaires : $\vec{v} = -3\vec{u}$, de sens contraires.

$\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{w}(4; -2; 5)$: 2, 2, puis $\frac{5}{3}$. Non colinéaires.

$\vec{a}(0; 2; -4)$ et $\vec{b}(0; -1; 2)$: les abscisses sont nulles toutes les deux ; $\frac{-1}{2} = -0,5$ et $\frac{2}{-4} = -0,5$. Colinéaires : $\vec{b} = -0,5\vec{a}$.

Alignement : $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 1)$, $C(7; 3; -1)$ donnent $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(6; 3; -3)$, soit $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: les points sont alignés.

Erreur fréquente — Deux coordonnées ne suffisent pas

$\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(2; 4; 5)$: les abscisses et les ordonnées donnent $k = 2$, mais $2 \times 3 = 6 \neq 5$. Ces vecteurs **ne sont pas** colinéaires. Dans le plan, deux coordonnées suffisaient ; dans l'espace, on contrôle toujours les trois.

Application 8 – Égaux, colinéaires ou ni l'un ni l'autre ?

Pour chaque paire, dire si les vecteurs sont égaux, colinéaires (donner k) ou non colinéaires.

a. $\vec{u}(3; -2; 1)$ et $\vec{v}(3; -2; 1)$ b. $\vec{u}(1; -3; 2)$ et $\vec{v}(-2; 6; -4)$

c. $\vec{u}(2; 4; -1)$ et $\vec{v}(4; 8; 3)$ d. $\vec{u}(0; 5; -2)$ et $\vec{v}(0; 15; -6)$

Correction — Application 8

- a. Mêmes coordonnées : **égaux** (donc aussi colinéaires, avec $k = 1$).
- b. $-2, -2, -2$: colinéaires, $\vec{v} = -2\vec{u}$.
- c. $2, 2$, puis $\frac{3}{-1} = -3$: **non colinéaires**. C'est le piège des deux premières coordonnées.
- d. Abscisses nulles toutes les deux ; 3 et 3 : colinéaires, $\vec{v} = 3\vec{u}$.

Application 9 – Parallélogramme et alignement

On donne $A(2; 1; 0)$, $B(5; 2; 1)$, $C(6; 5; 3)$ et $D(3; 4; 2)$.

- a. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$?
- b. Les points A , B et $E(11; 4; 3)$ sont-ils alignés ?
- c. Même question pour A , B et $F(8; 4; 1)$.

Correction — Application 9

- a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ils sont égaux, donc $ABCD$ est un parallélogramme.
- b. $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{AB}$: colinéaires, A , B , E sont alignés.
- c. $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\frac{6}{3} = 2$ mais $\frac{3}{1} = 3$. Non colinéaires : A , B , F ne sont pas alignés.

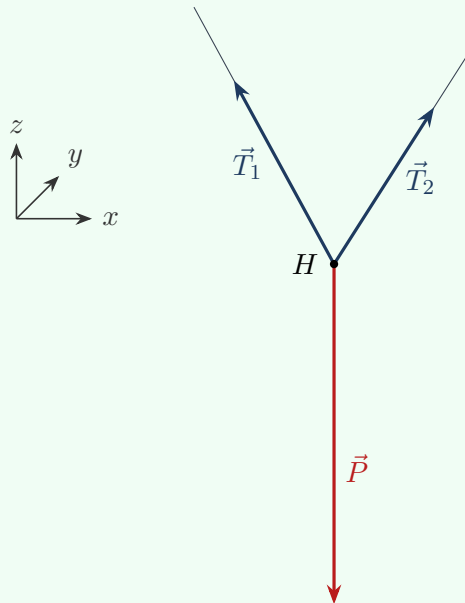
8 Bivalence : des forces dans l'espace

Remarque — Une force est un vecteur

En physique-chimie, une force est représentée par un vecteur : sa direction et son sens sont ceux de l'action, sa **norme** est son **intensité**, en newtons (N). Quand plusieurs forces agissent sur un objet, leur effet global est celui de leur **somme**, la résultante. Un objet immobile est soumis à des forces dont la somme est le **vecteur nul**.

Exemple — Un projecteur suspendu par deux câbles

Un projecteur de poids $\vec{P}(0; 0; -90)$ est accroché au point H par deux câbles. Les forces exercées par les câbles sont $\vec{T}_1(-30; 10; 45)$ et $\vec{T}_2(30; -10; 45)$ (en newtons).



Forces appliquées au point d'accroche H ; à gauche, l'orientation des axes. Échelle : 1 cm pour 20 N selon (Ox) et (Oz) . En gris fin, les câbles, qui prolongent $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$.

Somme :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} \begin{pmatrix} -30 + 30 + 0 \\ 10 - 10 + 0 \\ 45 + 45 - 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La somme est nulle : c'est cohérent avec un projecteur immobile.

Intensités : $\|\vec{T}_1\| = \sqrt{900 + 100 + 2025} = \sqrt{3025} = 55$ N, de même pour $\vec{T}_2$. Chaque câble tire donc avec 55 N, plus que la moitié du poids (45 N) : un câble incliné travaille davantage qu'un câble vertical.

Application 10 – Trois forces sur un anneau

Deux cordes tirent sur un anneau avec les forces $\vec{F}_1(12; -4; 3)$ et $\vec{F}_2(-10; 10; 6)$ (en newtons).

- Calculer l'intensité de $\vec{F}_1$.
- Calculer les coordonnées de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ et son intensité.
- Pour que l'anneau reste immobile, on ajoute une troisième force $\vec{F}_3$ telle que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Donner ses coordonnées et son intensité.

Correction — Application 10

a. $\|\vec{F}_1\| = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$ N.

b. $\vec{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{R}\| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11$ N.

c. $\vec{F}_3 = -\vec{R}$, donc $\vec{F}_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{F}_3\| = 11$ N.

Conduite : noter que $\|\vec{F}_1\| + \|\vec{F}_2\| \approx 13 + 15,4$ ne donne pas $\|\vec{R}\| = 11$: même remarque qu'au §5.

9 Aller plus loin : milieu d'un segment

Remarque — Aller plus loin – Hors des capacités exigibles du module

Le milieu I de $[AB]$ vérifie $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. Ses coordonnées sont les moyennes de celles de A et de B :

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

Exemple : $A(1; 4; -2)$ et $B(5; 0; 6)$ ont pour milieu $I(3; 2; 2)$.

Application 11 – Aller plus loin : le centre d'un pavé

On reprend le pavé de dimensions 6, 2 et 3 du §4, avec $O(0; 0; 0)$, $F(6; 2; 3)$, $A(6; 0; 0)$ et $G(0; 2; 3)$. Calculer les coordonnées du milieu de $[OF]$ puis du milieu de $[AG]$. Que constate-t-on ?

Correction — Application 11

Milieu de $[OF]$: $(3; 1; 1,5)$. Milieu de $[AG]$: $\left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+3}{2}\right) = (3; 1; 1,5)$.
Les deux diagonales ont le même milieu : c'est le **centre** du pavé.

Bilan – Je sais faire

À retenir

Dans un repère orthonormé de l'espace, avec $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

Égaux : mêmes coordonnées. Colinéaires : $\vec{v} = k\vec{u}$, avec le même k pour les trois coordonnées.

Méthode — Choisir la bonne méthode

Je cherche...

les coordonnées d'un vecteur dessiné
les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$
à représenter $\vec{u}$ depuis A
une longueur, une distance, une intensité
un déplacement total, une résultante
si des points sont alignés, des droites parallèles
si $ABCD$ est un parallélogramme

Je fais...

je compte les déplacements selon (Ox) , (Oy) , (Oz)
arrivée moins départ
 $B = A + \vec{u}$, puis chemin au sol et verticale
la norme $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
la somme, coordonnée par coordonnée
le même k sur les trois coordonnées
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Méthode — Vérifier sa réponse

1. Ai-je fait arrivée *moins* départ, avec les parenthèses pour les nombres négatifs ? 2. Ma norme est-elle positive, et au moins égale à la plus grande coordonnée en valeur absolue ? 3. Pour la colinéarité, ai-je contrôlé les *trois* coordonnées ? 4. Sur une figure, ai-je lu la cote à la verticale du point, depuis le

sol ? **5.** Ai-je donné l'unité d'une longueur ou d'une force ?

Remarque — Ce que ce module ne demande pas

Le produit scalaire, les équations de droites et le critère du déterminant $ad - bc = 0$ relèvent du plan ou d'autres modules. Le milieu d'un segment est un prolongement. Ici, tout se fait avec les trois coordonnées : lecture, représentation, norme, somme, produit par un réel et colinéarité.