

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 6****Vecteurs dans l'espace**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les cinq capacités du module, dans l'ordre du cours. Toutes les figures sont en perspective cavalière : (Ox) vers la droite et (Oz) vers le haut, en vraie grandeur (1 cm par unité, sauf mention) ; (Oy) vers le fond, à 45° , réduit de moitié. Pour représenter un vecteur, il faut une règle et un crayon bien taillé. Écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec son unité quand la grandeur en a une. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans l'espace muni d'un repère orthonormé	1 à 5	2
C2 – Représenter, dans l'espace muni d'un repère orthonormé, un vecteur dont les coordonnées sont données	6 à 9	5
C3 – Calculer la norme d'un vecteur dans l'espace muni d'un repère orthonormé	10 à 15	8
C4 – Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs dans l'espace muni d'un repère orthonormé	16 à 21	11
C5 – Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées, des vecteurs égaux ou colinéaires dans l'espace muni d'un repère orthonormé	22 à 28	13
Aller plus loin – Milieu d'un segment	29	16

Dans chaque capacité, les exercices vont de l'application guidée à l'analyse d'une erreur. Le dernier exercice, sur le milieu d'un segment, prolonge le module et n'est pas exigible.

C1 – Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans l'espace muni d'un repère orthonormé

Exigible. Prérequis : coordonnées d'un vecteur du plan (Première), lecture d'un pavé en perspective.

Rappel de cours

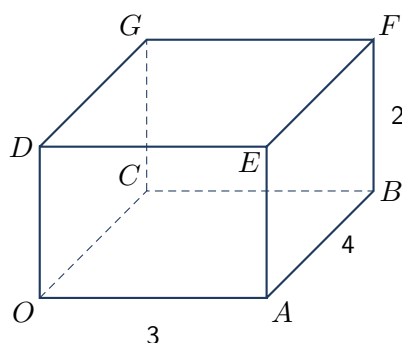
Un point $M(x; y; z)$ s'atteint depuis O en avançant de x selon (Ox) , de y selon (Oy) , puis de z à la verticale. La cote se lit **à la verticale du point, depuis le sol**.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \text{arrivée moins départ.}$$

Sur une figure : compter les déplacements parallèles aux arêtes ; signe moins dans le sens contraire de l'axe.

Exercice 1 — Les huit sommets d'un pavé

Le pavé droit $OABCDEFG$ ci-dessous a pour dimensions $OA = 3$, $OC = 4$ et $OD = 2$.



Pavé $OABCDEFG$ vu de face, légèrement de dessus ; arêtes cachées en tirets. Le sommet C , en bas à l'arrière gauche, est caché.

Compléter le tableau des coordonnées des huit sommets.

O	A	B	C	D	E	F	G
$(0; 0; 0)$							

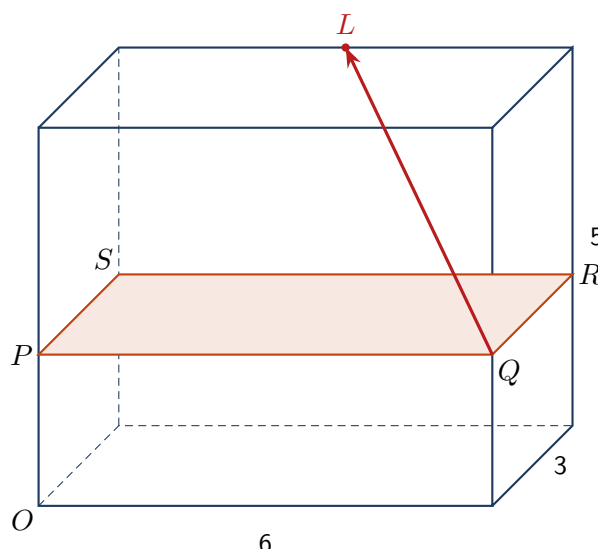
Correction de l'exercice 1

$A(3; 0; 0)$ $B(3; 4; 0)$ $C(0; 4; 0)$ $D(0; 0; 2)$ $E(3; 0; 2)$ $F(3; 4; 2)$ $G(0; 4; 2)$.

Contrôle rapide : les quatre sommets du dessous ont une cote nulle, ceux du dessus une cote égale à 2 ; les sommets de la face de devant (O, A, E, D) ont une ordonnée nulle. L'erreur attendue porte sur C , caché : on le retrouve en suivant l'arête en tirets depuis O .

Exercice 2 — La tablette et le spot d'une vitrine

Une vitrine de magasin a la forme d'un pavé droit de 60 cm de large, 30 cm de profondeur et 50 cm de haut. L'agenceur y pose une tablette de verre $PQRS$ à 20 cm de hauteur, et un spot L au milieu de l'arête arrière du plafond. Unité : 1 dm, origine O au coin avant gauche du dessous.



Vitrine vue de face, légèrement de dessus ; arêtes cachées en tirets. La tablette (en orange) est horizontale, à la hauteur 2. La flèche rouge va de Q au spot L .

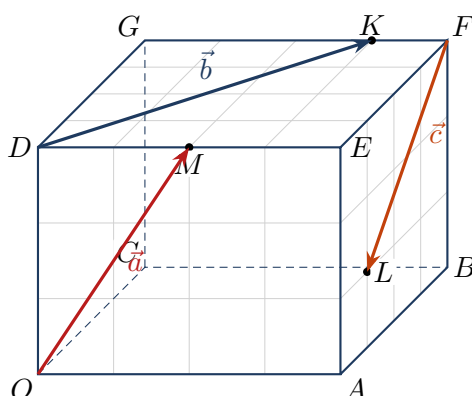
- Donner les coordonnées des coins P , Q , R et S de la tablette.
- Donner les coordonnées du spot L .
- Lire sur la figure les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{QL}$, puis les contrôler par le calcul.
- Le spot doit éclairer le milieu $M(3; 0; 2)$ du bord avant de la tablette. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{LM}$.

Correction de l'exercice 2

- $P(0; 0; 2)$ $Q(6; 0; 2)$ $R(6; 3; 2)$ $S(0; 3; 2)$: les quatre coins ont la même cote, 2.
- L est au plafond ($z = 5$), à l'arrière ($y = 3$), au milieu de la largeur ($x = 3$) : $L(3; 3; 5)$.
- De Q à L : 3 vers la gauche, 3 vers le fond, 3 vers le haut, donc $\overrightarrow{QL}(-3; 3; 3)$. Contrôle : $(3 - 6; 3 - 0; 5 - 2)$.
- $\overrightarrow{LM}(3 - 3; 0 - 3; 2 - 5) = (0; -3; -3)$: le faisceau vient de l'arrière et descend, sans déplacement latéral.

Exercice 3 — Trois flèches sur un pavé quadrillé

Sur le pavé quadrillé $OABCDEFG$ ci-dessous ($OA = 4$, $OC = 4$, $OD = 3$), trois vecteurs sont tracés : $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DK}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{FL}$.



Faces vues quadrillées : une maille vaut une unité. M est sur l'arête $[DE]$, K sur l'arête $[GF]$, L sur la face de droite.

- Lire les coordonnées de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ en comptant les déplacements le long des arêtes.
- Écrire les coordonnées de M , K et L , puis contrôler les réponses du **a.** par le calcul.

Correction de l'exercice 3

a. $\vec{a}$: 2 vers la droite, 0 vers le fond, 3 vers le haut : $\vec{a}(2; 0; 3)$. $\vec{b}$: 3 vers la droite, 4 vers le fond, sur le dessus : $\vec{b}(3; 4; 0)$. $\vec{c}$: sur la face de droite, 3 vers l'avant et 2 vers le bas : $\vec{c}(0; -3; -2)$.

b. $M(2; 0; 3)$, $K(3; 4; 3)$, $L(4; 1; 1)$. Avec $O(0; 0; 0)$, $D(0; 0; 3)$ et $F(4; 4; 3)$: $\overrightarrow{OM}(2; 0; 3)$, $\overrightarrow{DK}(3 - 0; 4 - 0; 3 - 3) = (3; 4; 0)$, $\overrightarrow{FL}(4 - 4; 1 - 4; 1 - 3) = (0; -3; -2)$.

Erreur fréquente : lire la cote de L sur l'axe (Oz) au lieu de la compter sur la face de droite, depuis l'arête du bas.

Exercice 4 — Arrivée moins départ

Calculer les coordonnées des vecteurs demandés.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ pour $A(3; 0; -2)$ et $B(-1; 4; 1)$.
- $\overrightarrow{CD}$ pour $C(2,5; 1; 0)$ et $D(4; -1; 1,5)$.
- $\overrightarrow{GH}$ pour $G(-2; -3; 4)$ et $H(-2; 1; -1)$.
- $\overrightarrow{OK}$ pour $K(7; -5; 2)$, O étant l'origine du repère.

Correction de l'exercice 4

a. $\overrightarrow{AB}(-1 - 3; 4 - 0; 1 - (-2)) = (-4; 4; 3)$ et $\overrightarrow{BA}(4; -4; -3)$.

b. $\overrightarrow{CD}(4 - 2,5; -1 - 1; 1,5 - 0) = (1,5; -2; 1,5)$.

c. $\overrightarrow{GH}(-2 - (-2); 1 - (-3); -1 - 4) = (0; 4; -5)$.

d. $\overrightarrow{OK}(7; -5; 2)$: les coordonnées de $\overrightarrow{OK}$ sont celles du point K , puisque l'origine a pour coordonnées $(0; 0; 0)$.

Exercice 5 — Deux erreurs de signe

Pour $A(4; -1; 2)$ et $B(1; 3; -2)$, Lina écrit : « $\overrightarrow{AB}(-3; 2; 0)$ ».

- Refaire le calcul coordonnée par coordonnée.
- Quelles erreurs Lina a-t-elle commises ?

Correction de l'exercice 5

a. $\overrightarrow{AB}(1 - 4; 3 - (-1); -2 - 2) = (-3; 4; -4)$.

b. L'abscisse est juste. Pour l'ordonnée, Lina a calculé $3 - 1 = 2$ au lieu de $3 - (-1) = 4$: elle a oublié que soustraire -1 revient à ajouter 1. Pour la cote, elle a calculé $-2 + 2 = 0$ au lieu de $-2 - 2 = -4$: même confusion de signe, dans l'autre sens.

Conseil à donner : écrire la parenthèse autour d'une coordonnée négative de départ, $3 - (-1)$, avant de calculer.

C2 – Représenter, dans l'espace muni d'un repère orthonormé, un vecteur dont les coordonnées sont données

Exigible. Prérequis : C1.

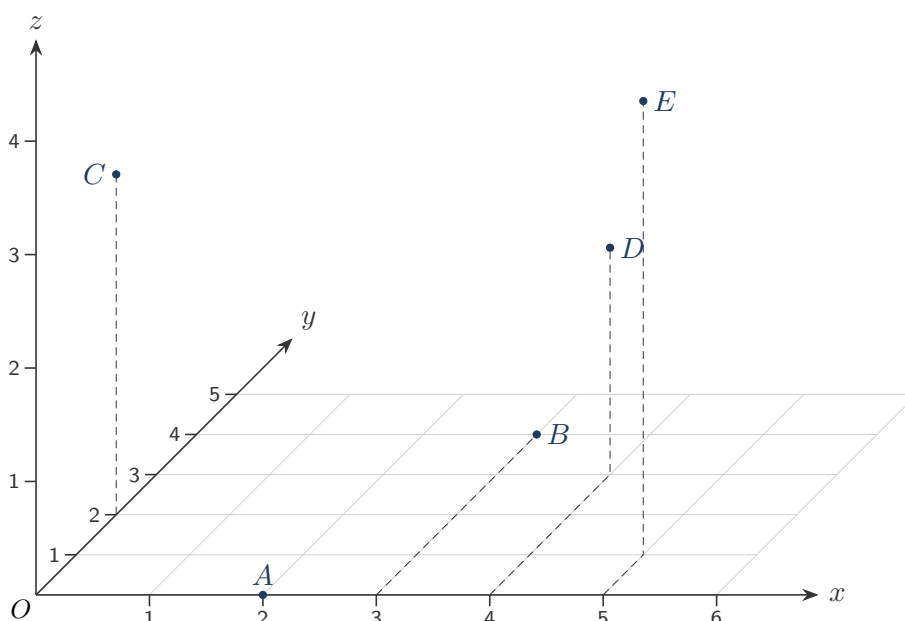
Rappel de cours

Pour représenter $\vec{u}(x; y; z)$ à partir de A : **1.** calculer l'extrémité $B(x_A + x; y_A + y; z_A + z)$; **2.** placer A et B par leur chemin : au sol, puis à la verticale ; **3.** tracer la flèche de A vers B .

Sur (Ox) et sur (Oz) , la longueur d'une unité est indiquée sous la figure ; selon (Oy) , une unité est une maille du quadrillage du sol.

Exercice 6 — Placer cinq points

Dans le repère ci-dessous, placer les points $A(2; 0; 0)$, $B(3; 4; 0)$, $C(0; 2; 3)$, $D(4; 3; 2)$ et $E(5; 1; 4)$ en traçant leur chemin depuis l'origine : au sol d'abord, puis à la verticale.



Repère orthonormé, sol (xOy) quadrillé. Une unité vaut 1,5 cm sur (Ox) et sur (Oz) ; selon (Oy) , elle vaut une maille du quadrillage.

Correction de l'exercice 6

La figure de l'énoncé montre, dans cette version, les cinq points placés avec leur chemin.

A est sur l'axe (Ox) ; B est au sol ; C est dans le plan vertical du fond gauche ($x = 0$) : on avance de 2 sur (Oy) puis on monte de 3 ; D et E se placent par le chemin complet.

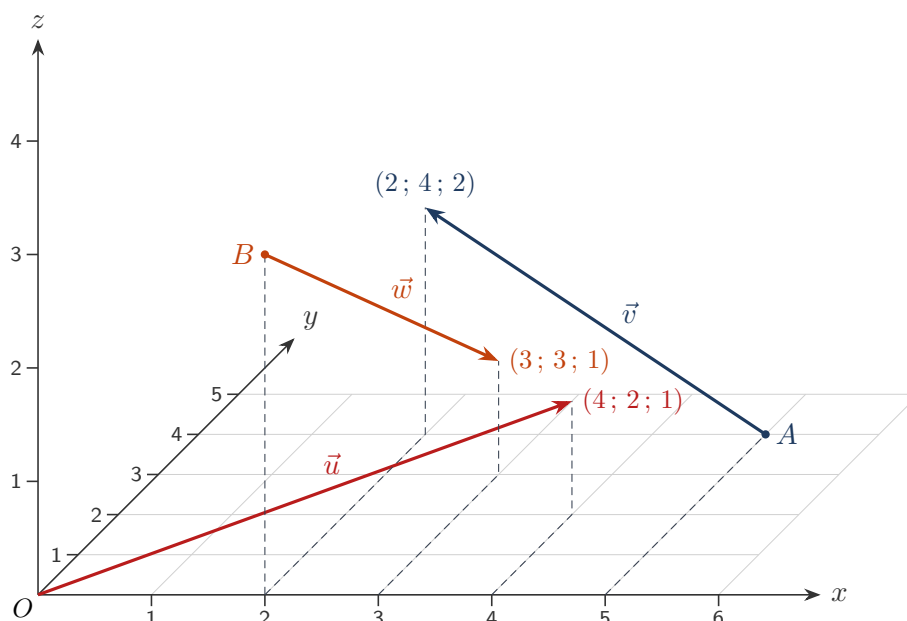
Conduite : pour C , beaucoup d'élèves partent sur (Ox) ; faire relire l'abscisse nulle. Pour E , vérifier que la montée de 4 unités (6 cm) part bien du point $(5; 1; 0)$ du sol.

Exercice 7 — Trois vecteurs, trois points de départ

Dans le repère ci-dessous, représenter :

- a. $\vec{u}(4; 2; 1)$ à partir de l'origine O ;
- b. $\vec{v}(-3; 0; 2)$ à partir du point $A(5; 4; 0)$;
- c. $\vec{w}(1; 3; -2)$ à partir du point $B(2; 0; 3)$.

Pour chaque vecteur, calculer d'abord les coordonnées de l'extrémité.



Repère orthonormé, sol quadrillé. Une unité vaut 1,5 cm sur (Ox) et sur (Oz) ; selon (Oy) , une maille du quadrillage.

Correction de l'exercice 7

Extrémités : a. $(4; 2; 1)$ b. $(5 - 3; 4 + 0; 0 + 2) = (2; 4; 2)$ c. $(2 + 1; 0 + 3; 3 - 2) = (3; 3; 1)$.

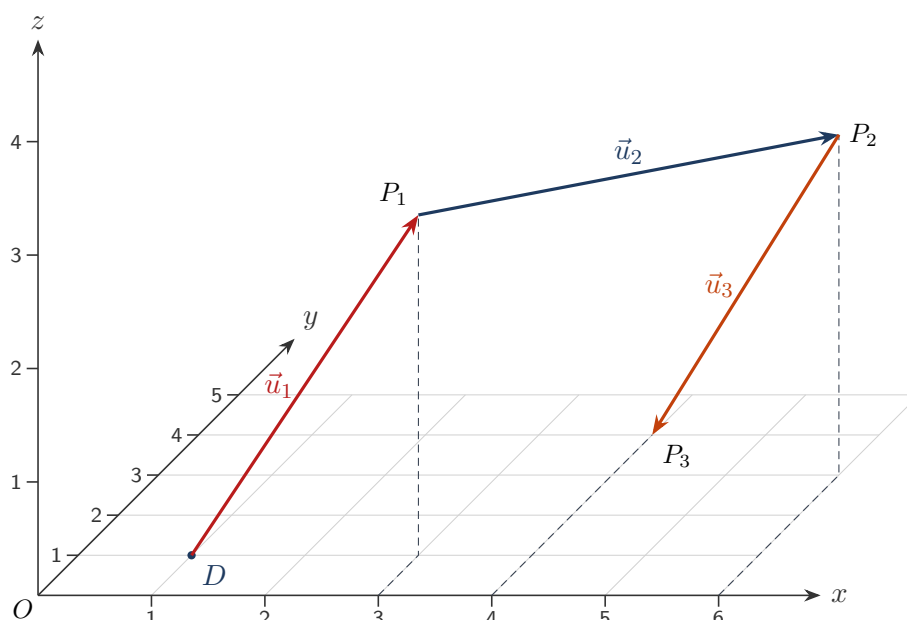
La figure attendue est celle de l'énoncé de cette version. $\vec{v}$ est horizontal selon (Ox) vers la gauche puis monte : sa flèche part vers le haut à gauche. $\vec{w}$ descend de 2 unités : son extrémité est plus basse que B .

Exercice 8 — *Le vol d'un drone de loisir*

Un drone de loisir décolle du point $D(1; 1; 0)$ (unité : le mètre). Il effectue successivement trois déplacements :

$$\vec{u}_1(2; 0; 3) \text{ (montée), } \quad \vec{u}_2(3; 2; 0) \text{ (vol horizontal), } \quad \vec{u}_3(-2; 1; -3) \text{ (descente).}$$

- Calculer les coordonnées des points P_1 , P_2 et P_3 atteints après chaque déplacement.
- Représenter les trois déplacements, bout à bout, dans le repère ci-dessous.
- Le drone s'est-il posé au sol ? Justifier.



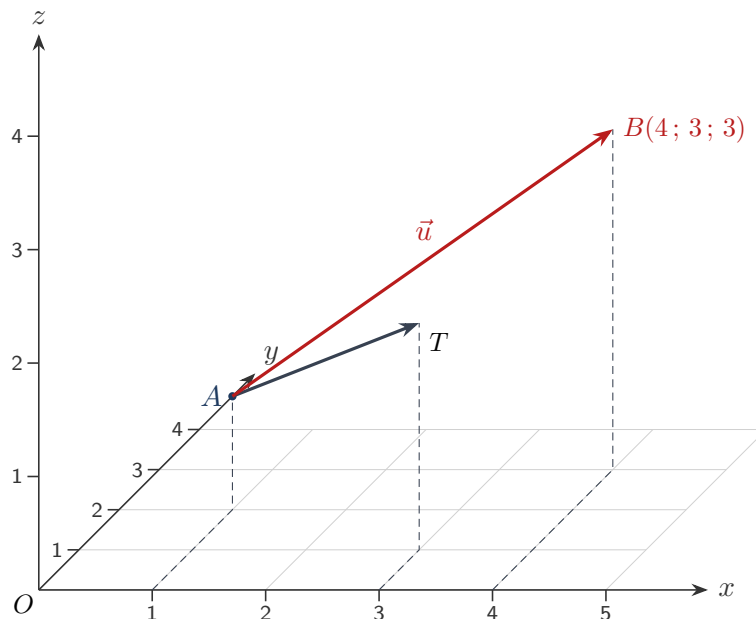
Repère orthonormé, unité le mètre, sol quadrillé ; le point de décollage D est placé. Une unité vaut 1,5 cm sur (Ox) et sur (Oz) .

Correction de l'exercice 8

- $P_1(1+2; 1+0; 0+3) = (3; 1; 3)$; $P_2(3+3; 1+2; 3+0) = (6; 3; 3)$; $P_3(6-2; 3+1; 3-3) = (4; 4; 0)$.
- Voir la figure de l'énoncé dans cette version : trois flèches bout à bout, chaque extrémité placée par son chemin au sol puis sa verticale.
- Oui : la cote de P_3 est nulle, le drone est au sol. On le voit aussi sans calcul des points : les cotes des déplacements s'additionnent en $3 + 0 + (-3) = 0$.

Exercice 9 — Le tracé de Tom

Tom doit représenter $\vec{u}(3; 1; 2)$ à partir du point $A(1; 2; 1)$. Voici son tracé : il a mené la flèche de A jusqu'au point $T(3; 1; 2)$.



Le tracé de Tom, en gris : les points A et T sont placés par leur chemin depuis le sol. Une unité vaut 1,5 cm sur (Ox) et sur (Oz) .

- Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AT}$ tracé par Tom. Est-ce $\vec{u}$?
- Quelle erreur Tom a-t-il faite ?
- Calculer l'extrémité correcte B et tracer la bonne flèche sur la figure.

Correction de l'exercice 9

- $\overrightarrow{AT}(3 - 1; 1 - 2; 2 - 1) = (2; -1; 1)$: ce n'est pas $\vec{u}(3; 1; 2)$.
- Tom a pris les coordonnées du vecteur pour celles de l'extrémité. Le point $(3; 1; 2)$ est l'extrémité du représentant de $\vec{u}$ qui part de O , pas de A .
- $B(1 + 3; 2 + 1; 1 + 2) = (4; 3; 3)$. La flèche rouge de la figure de cette version est le bon représentant.

C3 – Calculer la norme d'un vecteur dans l'espace muni d'un repère ortho-normé

Exigible. Prérequis : théorème de Pythagore, C1.

Rappel de cours

La norme est la longueur d'un représentant :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Le carré d'un nombre négatif est positif : $(-3)^2 = 9$. Une norme n'est jamais négative, et ce n'est pas la somme des coordonnées.

Exercice 10 — Cinq normes

Calculer la norme de chaque vecteur. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au centième si elle n'est pas entière.

- $\vec{u}(2; 6; 9)$
- $\vec{v}(-12; 4; 3)$
- $\vec{w}(0; -7; 24)$
- $\vec{t}(3; -5; 4)$
- $\vec{s}(1,5; 2; 6)$

Correction de l'exercice 10

- a. $\sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11$. b. $\sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$. c. $\sqrt{0 + 49 + 576} = \sqrt{625} = 25$.
 d. $\sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} \approx 7,07$. e. $\sqrt{2,25 + 4 + 36} = \sqrt{42,25} = 6,5$.

Contrôle : chaque norme est au moins égale à la plus grande coordonnée en valeur absolue (9, 12, 24, 5, 6) et au plus égale à la somme des valeurs absolues.

Exercice 11 — La tyrolienne

Sur un parcours dans les arbres, une tyrolienne part d'une plateforme $D(0; 0; 12)$ et arrive sur une plateforme $A(40; 30; 2)$ (unité : le mètre, z est la hauteur au-dessus du sol).

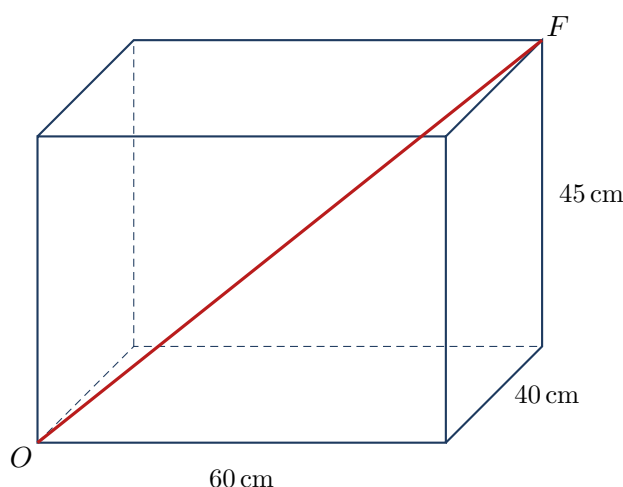
- a. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{DA}$.
 b. Calculer la distance DA , arrondie au dixième.
 c. Calculer la distance au sol entre les pieds des deux arbres, c'est-à-dire la norme de $\overrightarrow{D'A'}$ avec $D'(0; 0; 0)$ et $A'(40; 30; 0)$. Comparer avec DA .

Correction de l'exercice 11

- a. $\overrightarrow{DA}(40; 30; -10)$.
 b. $DA = \sqrt{1600 + 900 + 100} = \sqrt{2600} \approx 51,0$ m.
 c. $\overrightarrow{D'A'}(40; 30; 0)$ et $D'A' = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50$ m. Le câble est un peu plus long que la distance au sol, à cause des 10 m de dénivelé : environ 1 m de plus.

Exercice 12 — La tringle dans le carton

Pour un déménagement, on veut ranger une tringle à rideaux dans un carton en forme de pavé droit de $60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$. La plus grande longueur qui tient dans le carton est celle de sa diagonale $[OF]$.



Carton vu de face, légèrement de dessus ; arêtes cachées en tirets. En rouge, la diagonale qui va du coin O au coin opposé F.

- a. On place l'origine en O , l'unité étant le centimètre. Donner les coordonnées de F , puis celles de $\overrightarrow{OF}$.
 b. Calculer la longueur OF .
 c. Une tringle de 80 cm tient-elle dans le carton ? Et une tringle de 90 cm ?

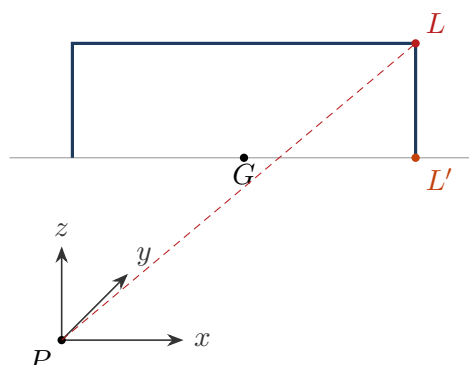
Correction de l'exercice 12

- a. $F(60; 40; 45)$ et $\overrightarrow{OF}(60; 40; 45)$.
 b. $OF = \sqrt{3600 + 1600 + 2025} = \sqrt{7225} = 85$ cm.
 c. La tringle de 80 cm tient, en diagonale : $80 < 85$. Celle de 90 cm ne tient pas, même en diagonale : $90 > 85$.

Remarque : aucune arête ne dépasse 60 cm ; c'est la diagonale de l'espace qui fait gagner 25 cm.

Exercice 13 — Le penalty en pleine lucarne

Lors d'un penalty, le ballon est posé au point de réparation P , à 11 m de la ligne de but. Le but mesure 7,32 m de large et 2,44 m de haut. On place l'origine en P : l'axe (Ox) est parallèle à la ligne de but, l'axe (Oy) va vers le but, l'axe (Oz) vers le haut (unité : le mètre).



Le but, au fond, et le point de réparation P , au premier plan. L est la lucarne droite (coin haut du but), L' le pied du poteau droit, G le milieu de la ligne de but. En pointillés rouges, la trajectoire rectiligne supposée vers la lucarne.

- Justifier que $L(3,66 ; 11 ; 2,44)$, puis donner les coordonnées de L' et de G .
- Calculer les distances PL , PL' et PG , arrondies au centimètre.
- De combien le trajet vers la lucarne est-il plus long que le trajet vers le milieu du but, en ligne droite ?

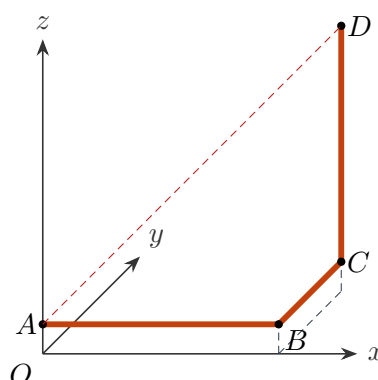
Correction de l'exercice 13

- Le poteau droit est à la moitié de 7,32 m du milieu : $x = 3,66$; la ligne de but est à $y = 11$; la barre est à $z = 2,44$. Donc $L(3,66 ; 11 ; 2,44)$, $L'(3,66 ; 11 ; 0)$ et $G(0 ; 11 ; 0)$.
- $PL = \sqrt{3,66^2 + 11^2 + 2,44^2} = \sqrt{140,3492} \approx 11,85$ m ; $PL' = \sqrt{3,66^2 + 11^2} = \sqrt{134,3956} \approx 11,59$ m ; $PG = 11$ m.
- $11,85 - 11 = 0,85$ m environ : le ballon parcourt 85 cm de plus vers la lucarne.

Exercice 14 — Le tube de cuivre

Un installateur relie la sortie A d'un ballon d'eau chaude à un robinet D par un tube de cuivre qui longe les murs. Les coudes sont en B et en C (unité : le mètre) :

$$A(0 ; 0 ; 0,3) \quad B(2,4 ; 0 ; 0,3) \quad C(2,4 ; 1,8 ; 0,3) \quad D(2,4 ; 1,8 ; 2,7)$$



En orange, le tube $ABCD$; en pointillés rouges, le segment $[AD]$ qui relie directement ses extrémités. Les pointillés gris placent B et C depuis le sol.

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis leurs normes.
- Quelle longueur de tube faut-il, sans compter les raccords ?
- Calculer la distance AD , arrondie au centimètre, et la comparer à la longueur du tube.

Correction de l'exercice 14

- a. $\overrightarrow{AB}(2,4; 0; 0)$, $\overrightarrow{BC}(0; 1,8; 0)$, $\overrightarrow{CD}(0; 0; 2,4)$. Chaque vecteur est parallèle à un axe : sa norme est la valeur absolue de sa seule coordonnée non nulle, soit 2,4 m, 1,8 m et 2,4 m.
- b. $2,4 + 1,8 + 2,4 = 6,6$ m de tube.
- c. $\overrightarrow{AD}(2,4; 1,8; 2,4)$ et $AD = \sqrt{5,76 + 3,24 + 5,76} = \sqrt{14,76} \approx 3,84$ m. Le tube, qui suit les murs, est presque deux fois plus long que la distance directe.

Exercice 15 — Trois réponses pour une norme

On demande la norme de $\vec{u}(-3; 4; -12)$. Trois élèves répondent.

Karim : $\|\vec{u}\| = -3 + 4 - 12 = -11$.

Zoé : $\|\vec{u}\| = \sqrt{-9 + 16 - 144}$, « impossible, le nombre sous la racine est négatif ».

Noah : $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Qui a raison ? Expliquer l'erreur de chacun des deux autres.

Correction de l'exercice 15

Noah a raison : $\|\vec{u}\| = 13$.

Karim a additionné les coordonnées : ce n'est pas la formule de la norme, et une norme ne peut pas être négative.

Zoé a écrit $(-3)^2 = -9$: le carré d'un nombre négatif est positif, $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$. À la calculatrice, il faut taper les parenthèses.

C4 – Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs dans l'espace muni d'un repère orthonormé

Exigible. Prérequis : C1.

Rappel de cours

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (Chasles)}$$

La somme décrit le déplacement total. On additionne les **coordonnées**, jamais les normes : la longueur d'un trajet n'est pas la norme du déplacement.

Exercice 16 — Trois sommes

On donne $\vec{u}(1; -2; 5)$, $\vec{v}(4; 6; -3)$ et $\vec{w}(-5; 0; 2)$. Calculer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, de $\vec{v} + \vec{w}$, de $\vec{u} + \vec{w}$, puis de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Correction de l'exercice 16

$\vec{u} + \vec{v}(5; 4; 2)$; $\vec{v} + \vec{w}(-1; 6; -1)$; $\vec{u} + \vec{w}(-4; -2; 7)$; $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}(0; 4; 4)$.

Contrôle possible : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}(5 - 5; 4 + 0; 2 + 2) = (0; 4; 4)$, même résultat.

Exercice 17 — La relation de Chasles

On donne $A(2; -1; 3)$, $B(0; 4; 1)$ et $C(5; 2; -2)$.

a. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.

b. En déduire celles de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

c. Calculer directement $\overrightarrow{AC}$. Quelle relation vient-on de vérifier ?

Correction de l'exercice 17

- a. $\overrightarrow{AB}(-2; 5; -2)$ et $\overrightarrow{BC}(5; -2; -3)$.
 b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}(3; 3; -5)$.
 c. $\overrightarrow{AC}(5 - 2; 2 - (-1); -2 - 3) = (3; 3; -5)$: c'est la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 18 — Le panier d'une nacelle

Sur un chantier, le panier d'une nacelle élévatrice part du point $S(2; 1; 0)$ (unité : le mètre). Il monte selon $\vec{u}(0; 0; 6)$, puis se déplace selon $\vec{v}(3; -2; 1)$, puis selon $\vec{w}(-1; 4; 0)$.

- a. Calculer le déplacement total $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
 b. En déduire les coordonnées du point d'arrivée T du panier.
 c. Calculer la distance ST , arrondie au centimètre, puis la longueur totale du trajet du panier. Pourquoi ces deux nombres sont-ils différents ?

Correction de l'exercice 18

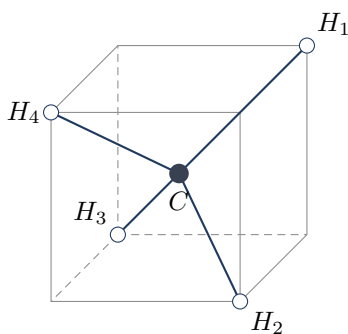
- a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}(0 + 3 - 1; 0 - 2 + 4; 6 + 1 + 0) = (2; 2; 7)$.
 b. $T(2 + 2; 1 + 2; 0 + 7) = (4; 3; 7)$.
 c. $ST = \sqrt{4 + 4 + 49} = \sqrt{57} \approx 7,55$ m. Trajet : $6 + \sqrt{9 + 4 + 1} + \sqrt{1 + 16} = 6 + \sqrt{14} + \sqrt{17} \approx 6 + 3,74 + 4,12 = 13,86$ m.

La distance ST est celle du déplacement total, en ligne droite ; le trajet additionne les longueurs des trois étapes. On additionne des coordonnées pour obtenir le déplacement, jamais des normes.

Exercice 19 — La molécule de méthane

Dans une molécule de méthane, l'atome de carbone C est au centre d'un cube et les quatre atomes d'hydrogène sont à quatre sommets de ce cube. On place l'origine en C ; l'unité vaut 63 pm ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$) :

$$H_1(1; 1; 1) \quad H_2(1; -1; -1) \quad H_3(-1; 1; -1) \quad H_4(-1; -1; 1)$$



Le cube de côté 2 unités, arêtes cachées en tirets. Le carbone C est au centre ; les liaisons, en bleu, vont vers quatre sommets qui ne sont jamais voisins sur une arête.

- a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CH_1}$, $\overrightarrow{CH_2}$, $\overrightarrow{CH_3}$ et $\overrightarrow{CH_4}$.
 b. Calculer $\overrightarrow{CH_1} + \overrightarrow{CH_2} + \overrightarrow{CH_3} + \overrightarrow{CH_4}$. Interpréter.
 c. Calculer la longueur d'une liaison CH_1 en unités, puis en picomètres (arrondir à l'unité).

Correction de l'exercice 19

- a. C est à l'origine : $\overrightarrow{CH_1}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{CH_2}(1; -1; -1)$, $\overrightarrow{CH_3}(-1; 1; -1)$, $\overrightarrow{CH_4}(-1; -1; 1)$.
 b. Somme : $(1 + 1 - 1 - 1; 1 - 1 + 1 - 1; 1 - 1 - 1 + 1) = (0; 0; 0)$. Les quatre liaisons se compensent : la molécule est parfaitement symétrique autour du carbone.
 c. $CH_1 = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \approx 1,732$ unité, soit $1,732 \times 63 \approx 109$ pm. C'est la longueur de la liaison carbone-hydrogène du méthane.

Exercice 20 — Du col au sommet

Une randonneuse repère sa progression avec un GPS : l'axe (Ox) pointe vers l'est, l'axe (Oy) vers le nord, l'axe (Oz) vers le haut (unité : le mètre). Du refuge R , le déplacement jusqu'au col K est $\overrightarrow{RK}(1\,200; 800; 450)$; du refuge au sommet S , il est $\overrightarrow{RS}(2\,100; 1\,500; 950)$.

- Recopier et compléter la relation de Chasles : $\overrightarrow{RK} + \overrightarrow{KS} = \dots$
- En déduire les coordonnées du déplacement $\overrightarrow{KS}$ du col au sommet.
- Quel dénivelé reste-t-il à monter depuis le col ? Quelle est la distance en ligne droite du col au sommet, arrondie au mètre ?

Correction de l'exercice 20

- $\overrightarrow{RK} + \overrightarrow{KS} = \overrightarrow{RS}$.
- $\overrightarrow{KS} = \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RK}$, soit $(2\,100 - 1\,200; 1\,500 - 800; 950 - 450) = (900; 700; 500)$. Contrôle : $(1\,200 + 900; 800 + 700; 450 + 500) = (2\,100; 1\,500; 950)$.
- Dénivelé : la cote de $\overrightarrow{KS}$, 500 m. Distance : $\sqrt{810\,000 + 490\,000 + 250\,000} = \sqrt{1\,550\,000} \approx 1\,245$ m.

Exercice 21 — Trois forces sur un crochet

Trois cordes tirent sur un crochet avec les forces suivantes, en newtons :

$$\vec{F}_1(40; 0; 30) \quad \vec{F}_2(-10; -20; 20) \quad \vec{F}_3(-30; 20; -50)$$

- Calculer l'intensité de chaque force (arrondir au dixième).
- Calculer la résultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.
- Le crochet est-il soumis à des forces qui se compensent ? Justifier.

Correction de l'exercice 21

- $\|\vec{F}_1\| = \sqrt{1\,600 + 0 + 900} = 50$ N ; $\|\vec{F}_2\| = \sqrt{100 + 400 + 400} = 30$ N ; $\|\vec{F}_3\| = \sqrt{900 + 400 + 2\,500} = \sqrt{3\,800} \approx 61,6$ N.
- $(40 - 10 - 30; 0 - 20 + 20; 30 + 20 - 50) = (0; 0; 0)$.
- Oui : la résultante est le vecteur nul. Pourtant, la somme des intensités vaut environ 141,6 N : ce sont les vecteurs qui se compensent, pas les intensités.

C5 – Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées, des vecteurs égaux ou colinéaires dans l'espace muni d'un repère orthonormé

Exigible. Prérequis : produit d'un vecteur par un réel.

Rappel de cours

$k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$. Égaux : mêmes trois coordonnées ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Colinéaires : $\vec{v} = k\vec{u}$, avec **le même** k pour les **trois** coordonnées ; une coordonnée nulle de $\vec{u}$ impose la même nulle pour $\vec{v}$. A, B, C alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 22 — Multiplier un vecteur

On donne $\vec{u}(4; -2; 6)$.

- Calculer les coordonnées de $2\vec{u}$, $-\vec{u}$, $0,5\vec{u}$ et $-1,5\vec{u}$.
- Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|0,5\vec{u}\|$ (arrondir au centième). Quelle relation observe-t-on ?
- Lesquels des vecteurs du **a.** ont le même sens que $\vec{u}$?

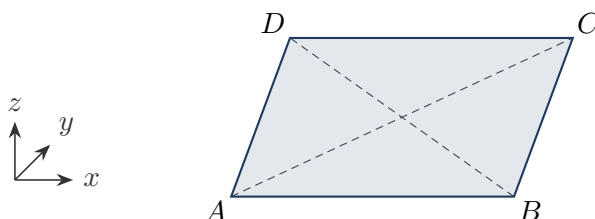
Correction de l'exercice 22

- a. $2\vec{u}(8; -4; 12)$; $-\vec{u}(-4; 2; -6)$; $0,5\vec{u}(2; -1; 3)$; $-1,5\vec{u}(-6; 3; -9)$.
 b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} \approx 7,48$ et $\|0,5\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3,74$: la norme est divisée par 2, comme le vecteur.
 c. $2\vec{u}$ et $0,5\vec{u}$, obtenus avec un réel positif. $-\vec{u}$ et $-1,5\vec{u}$ sont de sens contraire.

Exercice 23 — Les fixations d'un panneau solaire

Un panneau solaire rectangulaire est posé sur un toit en pente. Un relevé donne les coordonnées de ses quatre points de fixation (unité : le mètre) :

$$A(0; 0; 3) \quad B(1,7; 0; 3) \quad C(1,7; 1; 3,6) \quad D(0; 1; 3,6)$$



Le panneau $ABCD$ sur le toit, vu de face ; à gauche, l'orientation des axes. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont en pointillés.

- a. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en conclure pour $ABCD$?
 b. Calculer les longueurs AB et AD (arrondir au centimètre).
 c. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD . Pourquoi ce calcul permet-il de vérifier que le parallélogramme est un rectangle ?

Correction de l'exercice 23

- a. $\overrightarrow{AB}(1,7; 0; 0)$ et $\overrightarrow{DC}(1,7 - 0; 1 - 1; 3,6 - 3,6) = (1,7; 0; 0)$: les vecteurs sont égaux, donc $ABCD$ est un parallélogramme.
 b. $AB = 1,7$ m ; $\overrightarrow{AD}(0; 1; 0,6)$ et $AD = \sqrt{1 + 0,36} = \sqrt{1,36} \approx 1,17$ m.
 c. $\overrightarrow{AC}(1,7; 1; 0,6)$ et $\overrightarrow{BD}(-1,7; 1; 0,6)$: $AC = BD = \sqrt{2,89 + 1 + 0,36} = \sqrt{4,25} \approx 2,06$ m. Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. Le même contrôle des diagonales sert en menuiserie pour vérifier l'équerrage d'un caisson.

Exercice 24 — Colinéaires ou non ?

Pour chaque paire, dire si les vecteurs sont colinéaires. Si oui, donner le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

- a. $\vec{u}(2; -5; 1)$ et $\vec{v}(-6; 15; -3)$ b. $\vec{u}(3; 6; -9)$ et $\vec{v}(1; 2; -3)$
 c. $\vec{u}(4; 2; 6)$ et $\vec{v}(6; 3; 8)$ d. $\vec{u}(0; 4; 0)$ et $\vec{v}(0; -2; 0)$
 e. $\vec{u}(1; 0; 2)$ et $\vec{v}(3; 1; 6)$

Correction de l'exercice 24

- a. $-3, -3, -3$: colinéaires, $\vec{v} = -3\vec{u}$.
 b. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$: colinéaires, $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$.
 c. $\frac{6}{4} = 1,5$ et $\frac{3}{2} = 1,5$, mais $\frac{8}{6} \approx 1,33$: **non** colinéaires.
 d. Seules les ordonnées sont non nulles : $\frac{-2}{4} = -0,5$. Colinéaires, $\vec{v} = -0,5\vec{u}$ (les deux sont parallèles à l'axe (Oy)).
 e. L'ordonnée de $\vec{u}$ est nulle mais pas celle de $\vec{v}$: aucun k ne transforme 0 en 1. **Non** colinéaires, bien que $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = 3$.

Exercice 25 — Le faisceau laser

Au laboratoire, un laser placé en $L(0; 1; 2)$ envoie un faisceau rectiligne qui passe par le petit trou $T(2; 2; 3)$ d'un écran (unité : le décimètre).

- Calculer $\overrightarrow{LT}$.
- Une cible est placée en $K(8; 5; 6)$. Le faisceau l'atteint-il ?
- Même question pour une cible placée en $K'(8; 5; 5)$.

Correction de l'exercice 25

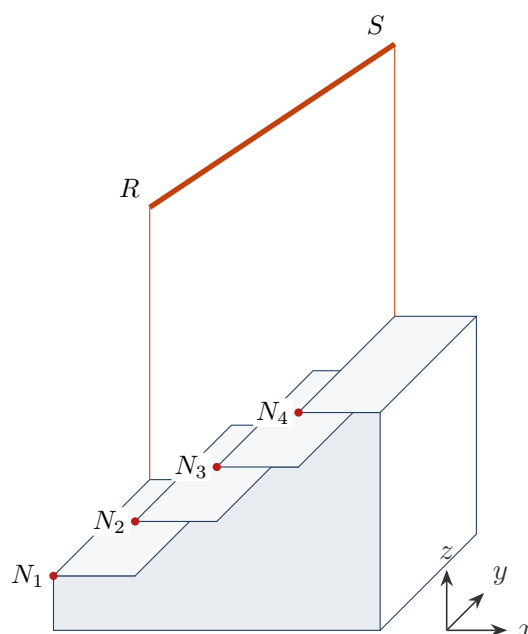
- $\overrightarrow{LT}(2; 1; 1)$.
- $\overrightarrow{LK}(8; 4; 4) = 4\overrightarrow{LT}$: les vecteurs sont colinéaires, donc L , T et K sont alignés. Le faisceau atteint la cible.
- $\overrightarrow{LK'}(8; 4; 3) : \frac{8}{2} = 4, \frac{4}{1} = 4$ mais $\frac{3}{1} = 3$. Non colinéaires : la cible K' n'est pas sur le faisceau, qui passe 1 dm au-dessus.

Exercice 26 — Les nez de marche et la main courante

Un menuisier fabrique un escalier droit dont chaque marche a une hauteur $h = 18$ cm et une profondeur utile (le giron) $g = 27$ cm. Dans un repère d'unité le mètre, (Ox) suit la montée, (Oy) la largeur, (Oz) la verticale. Les nez des quatre premières marches, du côté droit, sont

$$N_1(0; 0; 0,18) \quad N_2(0,27; 0; 0,36) \quad N_3(0,54; 0; 0,54) \quad N_4(0,81; 0; 0,72)$$

et la main courante, fixée contre le mur du côté gauche, va de $R(0; 0,9; 1,08)$ à $S(0,81; 0,9; 1,62)$.



Les quatre premières marches, vues de côté et légèrement de dessus ; les marches sont teintées. Points rouges : les nez de marche du côté droit. En orange : la main courante et ses deux supports, contre le mur du côté gauche. À droite, l'orientation des axes.

- Pour qu'un escalier soit confortable, la formule de Blondel demande que $2h + g$ soit compris entre 60 et 64 cm. Est-ce le cas ici ?
- Calculer $\overrightarrow{N_1N_2}$, $\overrightarrow{N_2N_3}$ et $\overrightarrow{N_3N_4}$. Que remarque-t-on ?
- Montrer que N_1 , N_2 et N_4 sont alignés.
- Calculer $\overrightarrow{RS}$. La main courante est-elle parallèle à la ligne des nez de marche ?
- Calculer la longueur RS , arrondie au centimètre.

Correction de l'exercice 26

- a. $2 \times 18 + 27 = 63$ cm : c'est bien entre 60 et 64 cm.
- b. $\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{N_2N_3} = \overrightarrow{N_3N_4}(0,27; 0; 0,18)$: les trois vecteurs sont égaux, chaque marche reproduit la précédente.
- c. $\overrightarrow{N_1N_4}(0,81; 0; 0,54) = 3 \overrightarrow{N_1N_2}$ (la deuxième coordonnée, nulle, l'est pour les deux) : colinéaires, donc N_1, N_2, N_4 sont alignés.
- d. $\overrightarrow{RS}(0,81; 0; 0,54) = 3 \overrightarrow{N_1N_2}$: $\overrightarrow{RS}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N_1N_2}$, la main courante est parallèle à la ligne des nez de marche.
- e. $RS = \sqrt{0,6561 + 0 + 0,2916} = \sqrt{0,9477} \approx 0,97$ m.

Exercice 27 — Trouver la coordonnée manquante

On donne $\vec{u}(2; -3; 4)$.

- a. Trouver y et z pour que $\vec{v}(6; y; z)$ soit colinéaire à $\vec{u}$.
- b. Trouver x pour que $\vec{w}(x; 6; -8)$ soit colinéaire à $\vec{u}$.
- c. Peut-on trouver y pour que $\vec{t}(-1; y; 2)$ soit colinéaire à $\vec{u}$? Justifier.

Correction de l'exercice 27

- a. $6 = k \times 2$ donne $k = 3$, donc $y = 3 \times (-3) = -9$ et $z = 3 \times 4 = 12$: $\vec{v}(6; -9; 12)$.
- b. Avec l'ordonnée : $6 = k \times (-3)$, $k = -2$; la cote confirme : $-2 \times 4 = -8$. Donc $x = -2 \times 2 = -4$.
- c. L'abscisse impose $k = -\frac{1}{2}$, mais la cote impose $k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$: les deux valeurs diffèrent. **Aucun** y ne convient.

Exercice 28 — Une conclusion trop rapide

Pour $A(1; 2; 0)$, $B(3; 5; 1)$ et $C(7; 11; 4)$, Inès écrit : « $\overrightarrow{AB}(2; 3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(6; 9; 4)$. Comme $\frac{6}{2} = 3$ et $\frac{9}{3} = 3$, les points A, B et C sont alignés. »

- a. Ses calculs de coordonnées sont-ils justes ?
- b. Sa conclusion est-elle juste ? Justifier.

Correction de l'exercice 28

- a. Oui : $\overrightarrow{AB}(2; 3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(6; 9; 4)$.
- b. Non. Inès n'a contrôlé que deux coordonnées. Pour la cote, $\frac{4}{1} = 4 \neq 3$: les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés. Dans l'espace, on contrôle les trois coordonnées.

Aller plus loin – Milieu d'un segment

Hors des capacités exigibles du module.

Rappel de cours

Le milieu I de $[AB]$ vérifie $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Exercice 29 — Milieux et centre d'un caisson

- a. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ pour $A(2; -1; 4)$ et $B(6; 3; 0)$.
- b. Un caisson a la forme du pavé $[0; 8] \times [0; 4] \times [0; 6]$ (unité : le décimètre). Calculer les coordonnées de son centre, milieu de la diagonale qui va de $O(0; 0; 0)$ à $F(8; 4; 6)$.
- c. $M(1; 2; 3)$ est le milieu de $[AK]$, avec $A(-1; 0; 5)$. Trouver les coordonnées de K .

Correction de l'exercice 29

a. $I\left(\frac{2+6}{2}; \frac{-1+3}{2}; \frac{4+0}{2}\right) = (4; 1; 2).$

b. Centre : $(4; 2; 3).$

c. $\frac{-1+x_K}{2} = 1$ donne $x_K = 3$; $\frac{0+y_K}{2} = 2$ donne $y_K = 4$; $\frac{5+z_K}{2} = 3$ donne $z_K = 1$. Donc $K(3; 4; 1).$

Contrôle : $\overrightarrow{AM}(2; 2; -2) = \overrightarrow{MK}.$