

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro

Cours et applications

Chapitre 5

Fonctions exponentielles et logarithme décimal

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir calculer un terme $u_n = u_0 \times q^n$ d'une suite géométrique et donner son sens de variation selon q (chapitre 3), calculer avec les puissances entières et les puissances de 10, associer un coefficient multiplicateur à une évolution en pourcentage, et lire des coordonnées sur un graphique. La calculatrice scientifique est indispensable ; règle et crayon sont nécessaires.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Représenter graphiquement les fonctions exponentielles de base q , définies sur un intervalle donné, par $x \mapsto q^x$ (avec q nombre réel strictement positif et différent de 1)	§1 Des suites géométriques aux fonctions exponentielles ; §2 Variations et courbe	2 él. 2
C2 – Utiliser les propriétés opératoires des fonctions exponentielles étudiées pour transformer des écritures numériques ou littérales	§3 Propriétés opératoires	5 él. 5
C3 – Représenter graphiquement la fonction logarithme décimal sur un intervalle donné (définition, variations et propriétés opératoires)	§4 Le logarithme décimal ; §5 Sa courbe ; §6 Ses propriétés opératoires	6 él. 6
C4 – Résoudre par le calcul, graphiquement ou à l'aide d'outils numériques des équations du type $q^x = a$ et $\log(x) = a$	§7 Résoudre une équation	11 él. 11
C5 – Résoudre par le calcul, graphiquement ou à l'aide d'outils numériques des inéquations du type $q^x \geq a$ (ou $q^x \leq a$) et $\log(x) \geq a$ (ou $\log(x) \leq a$)	§8 Résoudre une inéquation	12 él. 13
C4 et C5 – à l'aide d'outils numériques : encadrer une solution par balayage	§9 Le balayage	13 él. 14
C3 et C4 – le pH d'une solution et le niveau d'intensité acoustique	§10 Chimie et signaux	15 él. 15

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Les parties se lisent dans l'ordre : les fonctions exponentielles des §1 et §2 servent à définir le logarithme au §4, et les propriétés du §3 expliquent celles du §6. Sur la calculatrice, le logarithme décimal est la touche **log** ; la touche « ln » correspond à une autre fonction, qui n'est pas au programme de ce chapitre.

1 Des suites géométriques aux fonctions exponentielles (C1)

Une culture de bactéries **double chaque heure**. Au bout de n heures, le nombre de bactéries a été multiplié par 2^n : c'est le terme de rang n de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Cette suite ne répond qu'aux heures entières.

Que se passe-t-il au bout d'une **demi-heure** ? Le nombre est multiplié par un coefficient c tel que deux demi-heures redonnent une heure : $c \times c = 2$, donc $c = \sqrt{2} \approx 1,414$. On note ce nombre $2^{0,5}$. De la même façon, une heure *avant* le départ, il y avait deux fois moins de bactéries : on note $2^{-1} = \frac{1}{2}$. On peut ainsi donner un sens à 2^x pour **tout nombre réel** x .

Définition — Fonction exponentielle de base q

Soit q un nombre réel **strictement positif** et **différent de 1**. La **fonction exponentielle de base q** est la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = q^x.$$

Pour un entier naturel n , q^n est le terme de rang n de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q : la fonction **prolonge cette suite** entre les entiers. Pour tout réel x , on a de plus $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

Remarque — Pourquoi exclure $q = 1$?

$1^x = 1$ pour tout x : la fonction serait constante et ne décrirait aucune évolution.

Méthode — Calculer une image à la calculatrice

Utiliser la touche de puissance ($^$ ou x^y). Mettre l'exposant entre parenthèses dès qu'il est négatif ou qu'il contient une opération : $2^{(-1,5)}$, $0,5^{(t/8)}$.

Exemple — Images par la fonction $f(x) = 2^x$

$$f(3) = 2^3 = 8 \quad f(0) = 2^0 = 1 \quad f(0,5) = 2^{0,5} \approx 1,414 \quad f(1,5) = 2^{1,5} \approx 2,828 \quad f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Pour la culture de bactéries : au bout d'une heure et demie, le nombre de bactéries est multiplié par environ 2,83 ; deux heures avant le départ, il y en avait quatre fois moins.

Application 1 – Calculer des images

Une quantité diminue de 20 % chaque heure. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0,8^x$.

- Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$ sans calculatrice. De quelle suite géométrique ces nombres sont-ils les termes ?
- Calculer $g(2,5)$ et $g(-1)$, arrondis au millièème.
- Interpréter $g(2,5)$ pour la quantité étudiée.

Correction — Application 1

a. $g(0) = 1$, $g(1) = 0,8$, $g(2) = 0,64$, $g(3) = 0,512$: ce sont les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 0,8.

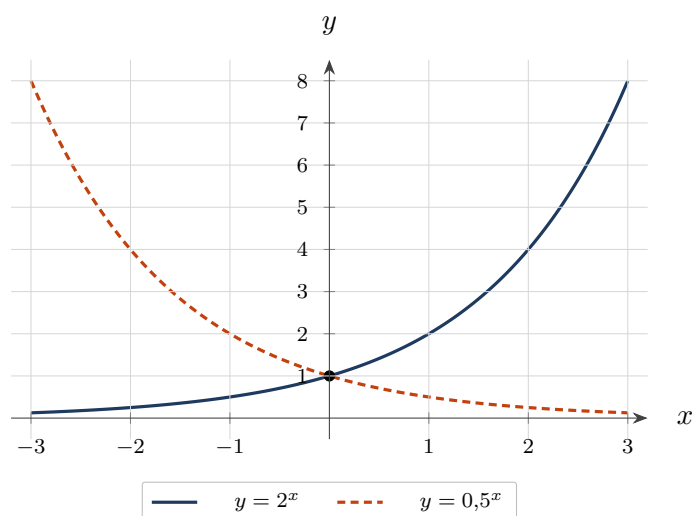
b. $g(2,5) = 0,8^{2,5} \approx 0,572$ $g(-1) = 0,8^{-1} = \frac{1}{0,8} = 1,25$.

c. Au bout de 2 h 30, il reste environ 57,2 % de la quantité de départ.

Conduite : faire dire que perdre 20 %, c'est garder 80 %, donc multiplier par 0,8. Le b. vérifie que l'élève sait saisir un exposant décimal et un exposant négatif.

2 Variations et représentation graphique (C1)

À la calculatrice ou avec un logiciel, on trace plusieurs fonctions exponentielles. On observe toujours la même chose.



Courbes des fonctions $x \mapsto 2^x$ (trait plein) et $x \mapsto 0,5^x$ (tirets) sur $[-3; 3]$. Les deux courbes passent par le point $(0; 1)$ et restent au-dessus de l'axe des abscisses. La première monte, la seconde descend.

Proposition — Variations des fonctions exponentielles (admis)

Soit $f(x) = q^x$, avec $q > 0$ et $q \neq 1$.

Si $q > 1$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Si $0 < q < 1$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, $q^x > 0$ pour tout x , et $q^0 = 1$: la courbe passe par le point $(0; 1)$ et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

x	$-\infty$	$+\infty$
q^x avec $q > 1$		$\nearrow$

x	$-\infty$	$+\infty$
q^x avec $0 < q < 1$		$\searrow$

C'est le prolongement de ce que l'on sait des suites géométriques : une suite de premier terme positif et de raison $q > 1$ est croissante, de raison $0 < q < 1$ décroissante.

Erreur fréquente — Une exponentielle ne s'annule jamais

$0,5^x$ diminue sans cesse, mais ne devient **jamais** nul ni négatif. Écrire « la quantité tombe à zéro au bout de 10 heures » contredit le modèle : elle devient seulement très petite.

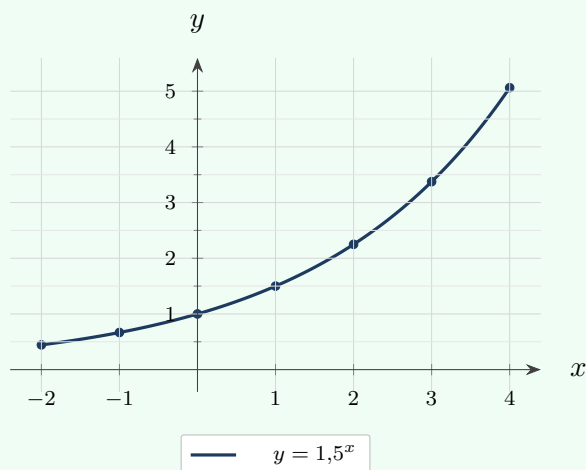
Méthode — Représenter $f(x) = q^x$ sur un intervalle donné

1. Dresser un tableau de valeurs à la calculatrice, avec un pas régulier. 2. Choisir les unités pour que toutes les valeurs tiennent dans le repère. 3. Placer les points. 4. Les relier par une **courbe lisse**, sans segments ni pointe, qui passe par $(0; 1)$ et respecte le sens de variation.

Exemple — Représenter $f(x) = 1,5^x$ sur $[-2; 4]$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$1,5^x$ (arrondi)	0,44	0,67	1	1,5	2,25	3,38	5,06

$q = 1,5 > 1$: la fonction est croissante, et la courbe monte de plus en plus vite.



Les sept points du tableau, reliés par une courbe lisse : la courbe de $x \mapsto 1,5^x$ sur $[-2; 4]$, croissante, passe par $(0; 1)$.

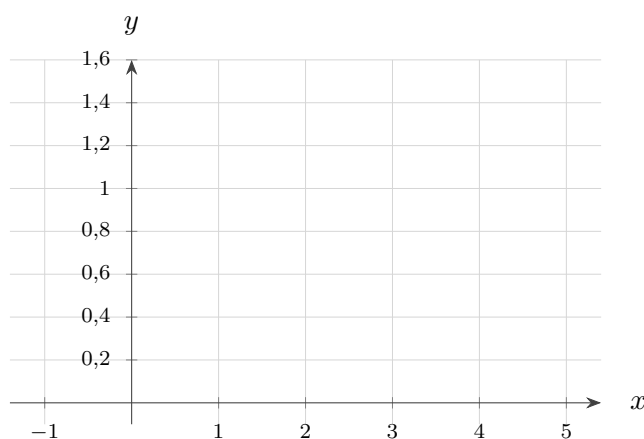
Application 2 – Tracer une courbe décroissante

On considère la fonction h définie sur $[-1; 5]$ par $h(x) = 0,7^x$.

a. Compléter le tableau de valeurs (arrondir au centième).

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$							

b. Tracer la courbe de h dans le repère ci-dessous.

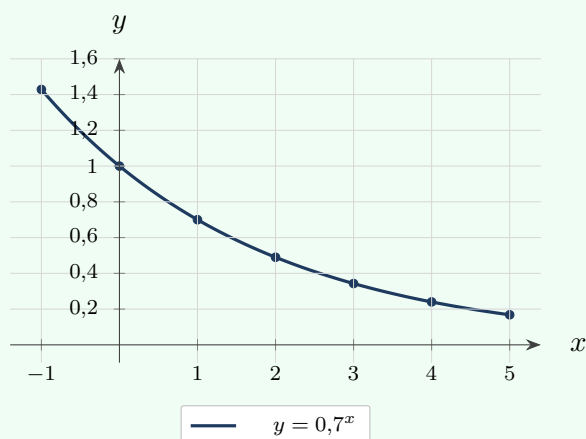


Repère vierge : x de -1 à 5 en abscisse, valeurs de $h(x)$ de 0 à $1,6$ en ordonnée, graduées de $0,2$ en $0,2$.

c. Donner le sens de variation de h sur $[-1; 5]$ et le justifier par la valeur de q .

Correction — Application 2**a.**

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	1,43	1	0,7	0,49	0,34	0,24	0,17

b.**c.** $q = 0,7$ et $0 < 0,7 < 1$: h est **décroissante** sur $[-1 ; 5]$.Conduite : exiger une courbe lisse qui ne touche pas l'axe des abscisses ; $h(5) \approx 0,17$ est encore positif.**3 Propriétés opératoires (C2)**

À la calculatrice : $1,5^{0,4} \times 1,5^{1,6} = 2,25$, et $2,25 = 1,5^2$, avec $0,4 + 1,6 = 2$. Les règles de calcul connues pour les puissances entières restent vraies pour des exposants réels. Elles sont admises.

Proposition — Propriétés opératoires (admises)Pour tout réel $q > 0$ et tous réels x et y :

$$q^{x+y} = q^x \times q^y \quad q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y} \quad q^{-x} = \frac{1}{q^x} \quad (q^x)^y = q^{x \times y}$$

et $q^0 = 1$, $q^1 = q$.**Exemple — Transformer des écritures**

Numériques : $2^{3,5} \times 2^{1,5} = 2^{3,5+1,5} = 2^5 = 32$ $\frac{5^{2,7}}{5^{0,7}} = 5^2 = 25$ $(4^{0,5})^4 = 4^2 = 16$.

Littérales : $2^{x+3} = 2^x \times 2^3 = 8 \times 2^x$ $(0,5^x)^2 = 0,5^{2x} = 0,25^x$ $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

Exemple — Une évolution sur deux périodesUne quantité augmente de 4 % par an : $Q(t) = Q_0 \times 1,04^t$, t en années. Deux ans plus tard,

$$Q(t+2) = Q_0 \times 1,04^t \times 1,04^2 = 1,0816 \times Q(t).$$

En deux ans, la quantité augmente de 8,16 %, et non de 8 % : les hausses se multiplient, elles ne s'additionnent pas.

Erreur fréquente — Ce qui n'est pas une propriété

$q^x + q^y \neq q^{x+y}$: $2^1 + 2^2 = 6$ alors que $2^3 = 8$. Deux bases différentes ne se combinent pas : $2^3 \times 3^2 = 72$, qui n'est ni 6^5 ni 6^6 . Enfin $2^x \neq 2x$: $2^3 = 8$ alors que $2 \times 3 = 6$.

Application 3 – Transformer des écritures

- a. Écrire sous la forme d'une seule puissance de 3, puis calculer : $3^{1,2} \times 3^{0,8}$; $\frac{3^{4,5}}{3^{1,5}}$; $(3^{0,5})^4$.
- b. Montrer que, pour tout réel x , $5 \times 5^{x-1} = 5^x$.
- c. Une population augmente de 2 % par mois : $P(t) = P_0 \times 1,02^t$, t en mois. Montrer que $P(t+12) = 1,02^{12} \times P(t)$, puis donner le pourcentage d'augmentation sur un an, arrondi au dixième.

Correction — Application 3

- a. $3^{1,2+0,8} = 3^2 = 9$; $3^{4,5-1,5} = 3^3 = 27$; $3^{0,5 \times 4} = 3^2 = 9$.
- b. $5 \times 5^{x-1} = 5^1 \times 5^{x-1} = 5^{1+x-1} = 5^x$.
- c. $P(t+12) = P_0 \times 1,02^{t+12} = P_0 \times 1,02^t \times 1,02^{12} = 1,02^{12} \times P(t)$. Or $1,02^{12} \approx 1,268$: la population augmente d'environ **26,8 %** sur un an, et non de 24 %.
- Conduite* : au c., l'erreur attendue est $12 \times 2 = 24$ %. Faire calculer $1,02^{12}$ pour la réfuter.

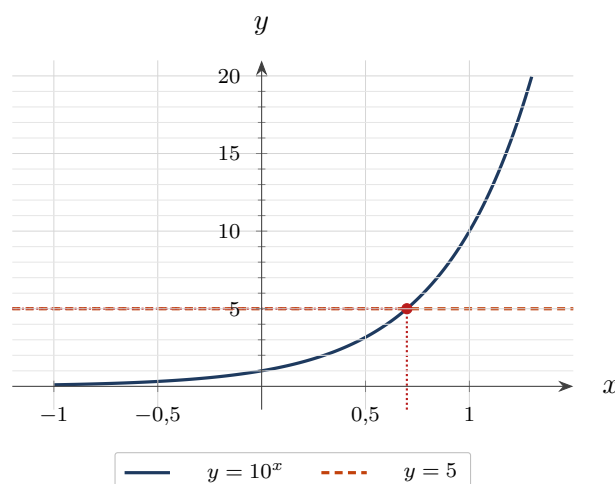
4 Le logarithme décimal (C3)

La fonction $x \mapsto 10^x$ est une fonction exponentielle de base $10 > 1$: elle est strictement croissante, ses valeurs sont toutes strictement positives et elles deviennent aussi grandes que l'on veut.

x	-2	-1	0	1	2	3
10^x	0,01	0,1	1	10	100	1 000

x	$-\infty$	$+\infty$
10^x	0	$+\infty$

Pour un nombre $b > 0$, la droite horizontale d'équation $y = b$ coupe donc la courbe de $x \mapsto 10^x$ en **un seul point**. L'abscisse de ce point est l'unique nombre x tel que $10^x = b$.



Courbe de $x \mapsto 10^x$ sur $[-1; 1,3]$ et droite d'équation $y = 5$. Le point commun a pour abscisse environ 0,7 : c'est le nombre dont la puissance de 10 vaut 5, c'est-à-dire $\log(5)$.

Définition — Logarithme décimal

Pour tout nombre réel $b > 0$, l'équation $10^x = b$ a **une seule solution**. On l'appelle le **logarithme**

décimal de b et on la note $\log(b)$:

$$\log(b) = x \iff 10^x = b.$$

La fonction logarithme décimal $x \mapsto \log(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$.

Proposition — Conséquences de la définition

Pour tout réel x : $\log(10^x) = x$. Pour tout réel $b > 0$: $10^{\log(b)} = b$.

En particulier : $\log(1) = 0$ $\log(10) = 1$ $\log(100) = 2$ $\log(0,1) = -1$ et $\log(10^n) = n$.

$\log(b)$ **n'existe pas** si $b \leq 0$: aucune puissance de 10 n'est négative ou nulle.

Exemple — Premières valeurs

$$\log(1000) = \log(10^3) = 3 \quad \log(0,001) = \log(10^{-3}) = -3 \quad \log(\sqrt{10}) = \log(10^{0,5}) = 0,5.$$

Pour $\log(500)$: $100 < 500 < 1000$, donc $2 < \log(500) < 3$. La calculatrice donne $\log(500) \approx 2,699$, et l'on contrôle que $10^{2,699} \approx 500$.

Méthode — À la calculatrice

Utiliser la touche **log**, jamais la touche « ln ». Contrôler le résultat en calculant la puissance de 10 correspondante : elle doit redonner le nombre de départ.

Application 4 – Le logarithme d'un nombre

- Donner sans calculatrice : $\log(10\,000)$; $\log(0,01)$; $\log(10^{-3,5})$; $10^{\log(7)}$.
- Encadrer $\log(45)$ puis $\log(0,3)$ par deux entiers consécutifs, sans calculatrice. Contrôler ensuite à la calculatrice.
- Pourquoi la calculatrice affiche-t-elle une erreur pour $\log(-2)$?

Correction — Application 4

- $\log(10^4) = 4$ $\log(10^{-2}) = -2$ $-3,5$ $10^{\log(7)} = 7$.
- $10 < 45 < 100$ donc $1 < \log(45) < 2$; la calculatrice donne $\log(45) \approx 1,653$. $0,1 < 0,3 < 1$ donc $-1 < \log(0,3) < 0$; $\log(0,3) \approx -0,523$.
- Il faudrait trouver x tel que $10^x = -2$. Or 10^x est toujours strictement positif : $\log(-2)$ n'existe pas.
Conduite : le b. installe le réflexe d'estimation. Un logarithme se lit comme « le nombre de zéros » : entre 10 et 100, il est entre 1 et 2.

5 La courbe du logarithme décimal (C3)

Proposition — Variations et signe du logarithme décimal

La fonction $x \mapsto \log(x)$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$: si $0 < a < b$, alors $\log(a) < \log(b)$.
 $\log(x) < 0$ pour $0 < x < 1$; $\log(1) = 0$; $\log(x) > 0$ pour $x > 1$.

Elle croît **lentement** : pour augmenter son logarithme de 1, il faut multiplier un nombre par 10.

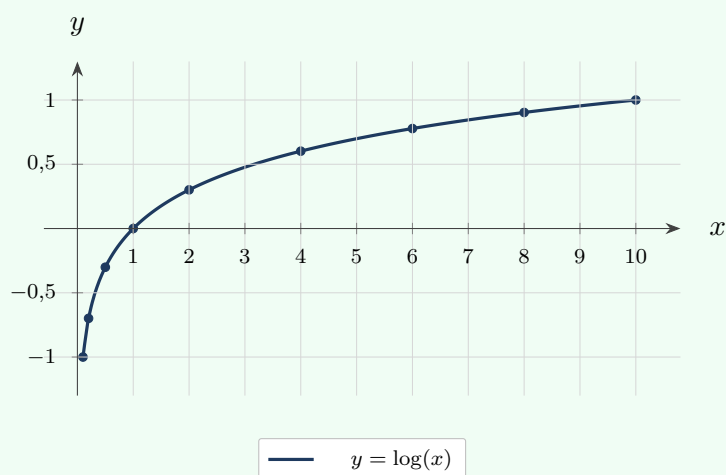
x	0	$+\infty$
$\log(x)$		$\nearrow$

Méthode — Représenter la fonction $\log$ sur un intervalle donné

Même démarche qu'au §2 : tableau de valeurs à la calculatrice, choix des unités, points, courbe lisse. Prendre **plus de points près de 0**, où la courbe descend très vite.

Exemple — Représenter $\log$ sur $[0,1 ; 10]$

x	0,1	0,2	0,5	1	2	4	6	8	10
$\log(x)$	-1	-0,70	-0,30	0	0,30	0,60	0,78	0,90	1



Courbe du logarithme décimal sur $[0,1 ; 10]$: elle coupe l'axe des abscisses au point $(1 ; 0)$, passe par $(10 ; 1)$ et $(0,1 ; -1)$, et monte de moins en moins vite.

Erreur fréquente — La courbe ne touche jamais l'axe vertical

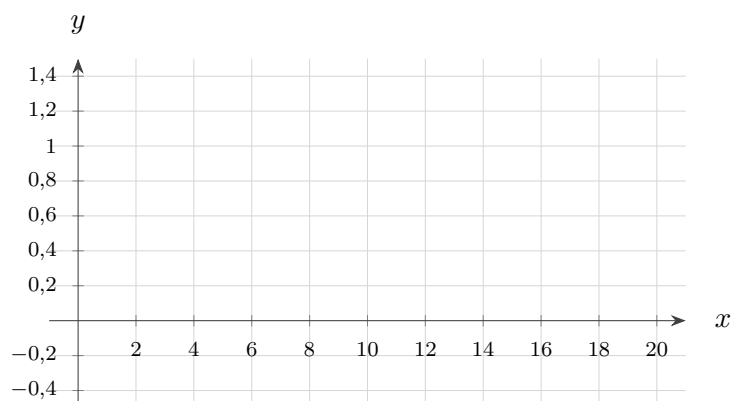
$\log(0)$ n'existe pas. Près de 0, la courbe descend sans fin : on ne la fait partir ni de l'origine, ni d'un point de l'axe vertical.

Application 5 – Tracer la courbe du logarithme

a. Compléter le tableau (arrondir au centième).

x	0,5	1	2	5	10	15	20
$\log(x)$							

b. Tracer la courbe de la fonction $\log$ sur $[0,5 ; 20]$.



Repère vierge : x de 0 à 20 en abscisse, gradué de 2 en 2 ; $\log(x)$ de $-0,4$ à $1,4$ en ordonnée, gradué de 0,2 en 0,2.

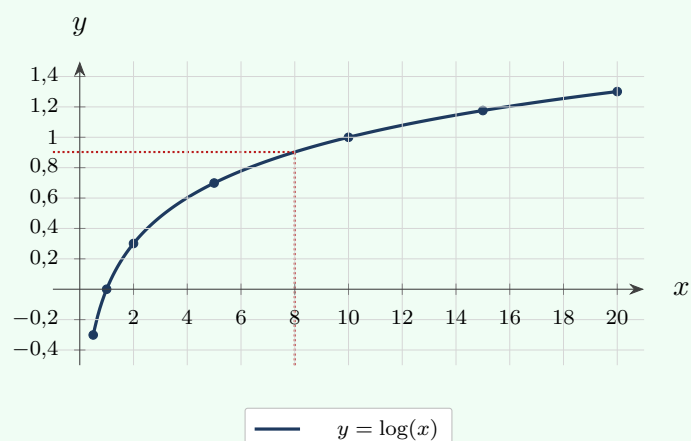
c. Lire sur la courbe une valeur approchée de $\log(8)$, puis la contrôler à la calculatrice.

Correction — Application 5

a.

x	0,5	1	2	5	10	15	20
$\log(x)$	$-0,30$	0	$0,30$	$0,70$	1	$1,18$	$1,30$

b.



c. On lit $\log(8) \approx 0,9$; la calculatrice donne $\log(8) \approx 0,903$.

Conduite : vérifier que la courbe passe par $(1 ; 0)$ et $(10 ; 1)$; ce sont les deux repères à connaître.

6 Propriétés opératoires du logarithme (C3)

$\log(10^2 \times 10^3) = \log(10^5) = 5 = 2 + 3$: le logarithme transforme les **produits en sommes**. C'est la propriété des exponentielles du §3, lue dans l'autre sens.

Proposition — Propriétés opératoires du logarithme décimal

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et pour tout réel x :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b) \quad \log(a^x) = x \times \log(a)$$

Démonstration

On écrit $a = 10^{\log(a)}$ et $b = 10^{\log(b)}$. D'après le §3, $a \times b = 10^{\log(a)} \times 10^{\log(b)} = 10^{\log(a)+\log(b)}$, et $\log(10^y) = y$ donne $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$. De même, $a^x = \left(10^{\log(a)}\right)^x = 10^{x \times \log(a)}$, d'où $\log(a^x) = x \log(a)$. $\square$

Exemple — Calculer sans calculatrice, avec $\log(2) \approx 0,301$

$$\log(20) = \log(2) + \log(10) \approx 1,301 \quad \log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = 1 - \log(2) \approx 0,699 \quad \log(8) = \log(2^3) = 3 \log(2) \approx 0,903$$

$$\log(0,5) = -\log(2) \approx -0,301.$$

Erreur fréquente — Somme et produit

$\log(a+b) \neq \log(a)+\log(b)$: $\log(10+90) = \log(100) = 2$, alors que $\log(10)+\log(90) \approx 1+1,954 = 2,954$. De même $\log(a \times b) \neq \log(a) \times \log(b)$: c'est une **somme**.

Application 6 – Utiliser les propriétés

- On donne $\log(3) \approx 0,477$. Calculer sans calculatrice $\log(30)$, $\log(9)$, $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\log(0,3)$.
- Écrire à l'aide d'un seul logarithme, puis calculer : $\log(4) + \log(25)$; $\log(600) - \log(6)$; $2 \log(5) + \log(40)$.
- Un élève écrit $\log(2+8) = \log(2) + \log(8)$. Calculer les deux membres et conclure.

Correction — Application 6

- $\log(30) = \log(3) + 1 \approx 1,477$ $\log(9) = 2 \log(3) \approx 0,954$ $\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3) \approx -0,477$
 $\log(0,3) = \log(3) - 1 \approx -0,523$.
- $\log(4 \times 25) = \log(100) = 2$ $\log\left(\frac{600}{6}\right) = \log(100) = 2$ $\log(5^2 \times 40) = \log(1000) = 3$.
- $\log(2+8) = \log(10) = 1$, alors que $\log(2) + \log(8) = \log(16) \approx 1,204$. L'élève a tort : la propriété porte sur un **produit**, pas sur une somme.

7 Résoudre une équation $q^x = a$ ou $\log(x) = a$ (C4)

Méthode — Par le calcul

Équation $q^x = a$, avec $q > 0$, $q \neq 1$ et $a > 0$: on prend le logarithme des deux membres.

$$q^x = a \iff \log(q^x) = \log(a) \iff x \log(q) = \log(a) \iff x = \frac{\log(a)}{\log(q)}$$

($\log(q) \neq 0$ puisque $q \neq 1$). Si $a \leq 0$, l'équation n'a **pas de solution**. Cas particulier : $10^x = a \iff x = \log(a)$.

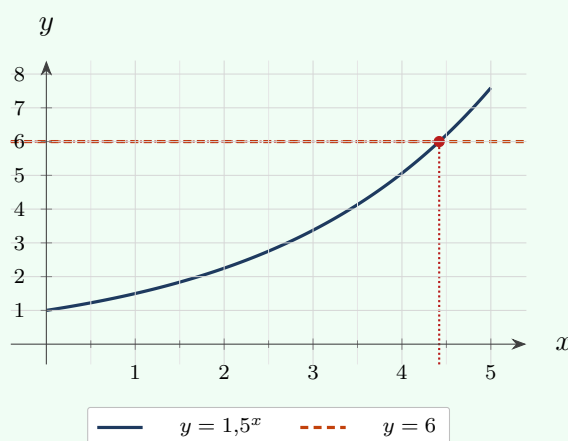
Équation $\log(x) = a$: par définition, $\log(x) = a \iff x = 10^a$.

Méthode — Graphiquement, ou à l'outil numérique

Tracer la courbe de $x \mapsto q^x$ et la droite horizontale $y = a$: la solution est l'abscisse de leur point commun, lue avec la précision du graphique. À la calculatrice, le tableau de valeurs permet d'encadrer cette abscisse (§9).

Exemple — Résoudre $1,5^x = 6$ de trois façons

Par le calcul : $x = \frac{\log(6)}{\log(1,5)} \approx \frac{0,778}{0,176} \approx 4,42$. Contrôle : $1,5^{4,42} \approx 6,0$.



Courbe de $x \mapsto 1,5^x$ sur $[0; 5]$ et droite $y = 6$: le point commun a une abscisse comprise entre 4 et 5, proche de 4,4.

Graphiquement : on lit $x \approx 4,4$. **À la calculatrice** : $1,5^4 \approx 5,06 < 6$ et $1,5^5 \approx 7,59 > 6$, donc $4 < x < 5$.

Exemple — Résoudre $\log(x) = 1,6$

$x = 10^{1,6} \approx 39,8$. Contrôle : $\log(39,8) \approx 1,6$.

Erreur fréquente — Diviser a par q

$1,5^x = 6$ ne donne pas $x = \frac{6}{1,5} = 4$: $1,5^4 \approx 5,06$, pas 6. Et $\frac{\log(6)}{\log(1,5)}$ n'est pas $\log\left(\frac{6}{1,5}\right)$.

Application 7 – Résoudre des équations

Résoudre, en arrondissant au millièmme si nécessaire :

a. $10^x = 0,05$ b. $2^x = 20$ c. $\log(x) = -0,5$ d. $3^x = -9$

e. Une substance perd 10 % de sa masse chaque jour : sa masse est multipliée par $0,9^t$ au bout de t jours. Au bout de combien de temps la masse a-t-elle été divisée par 2 ? Résoudre $0,9^t = 0,5$.

Correction — Application 7

a. $x = \log(0,05) \approx -1,301$ b. $x = \frac{\log(20)}{\log(2)} \approx 4,322$ c. $x = 10^{-0,5} \approx 0,316$ d. Pas de solution : $3^x > 0$ pour tout x .

e. $t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,9)} \approx \frac{-0,301}{-0,046} \approx 6,579$: la masse est divisée par 2 au bout d'environ 6,6 jours. Contrôle : $0,9^{6,579} \approx 0,500$.

Conduite : au d., la réponse « pas de solution » doit être justifiée par le signe de 3^x , pas par une erreur de calculatrice.

8 Résoudre une inéquation (C5)

On résout d'abord l'équation, puis on utilise le **sens de variation** de la fonction.

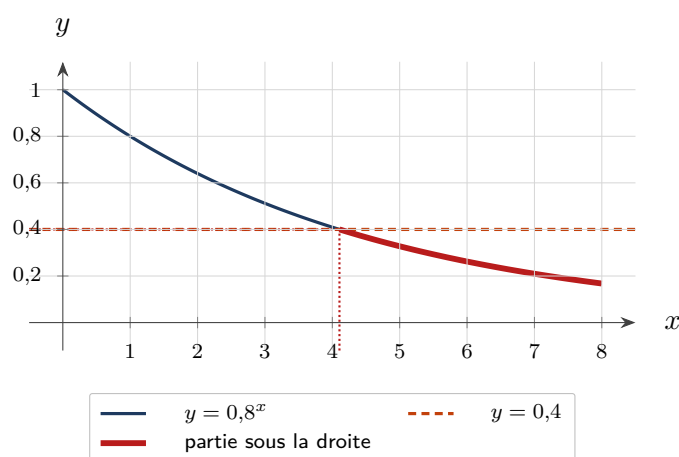
Proposition — Inéquations et sens de variation

Soit $a > 0$ et $x_0 = \frac{\log(a)}{\log(q)}$ la solution de $q^x = a$.

Si $q > 1$ (fonction croissante) : $q^x \geq a \iff x \geq x_0$ et $q^x \leq a \iff x \leq x_0$.

Si $0 < q < 1$ (fonction décroissante) : $q^x \geq a \iff x \leq x_0$ et $q^x \leq a \iff x \geq x_0$: **le sens change**.

Pour le logarithme (fonction croissante) : $\log(x) \geq a \iff x \geq 10^a$ et $\log(x) \leq a \iff 0 < x \leq 10^a$.



Courbe de $x \mapsto 0,8^x$, décroissante, et droite $y = 0,4$. La partie épaissie de la courbe est sous la droite : elle correspond aux abscisses $x \geq x_0$, avec $x_0 \approx 4,1$. Donc $0,8^x \leq 0,4 \iff x \geq x_0$.

Remarque — Le même résultat par le calcul

$0,8^x \leq 0,4 \iff x \log(0,8) \leq \log(0,4)$. Comme $\log(0,8) < 0$, diviser par ce nombre **change le sens** :
 $x \geq \frac{\log(0,4)}{\log(0,8)} \approx 4,11$.

Exemple — Le premier rang qui passe sous un seuil

Une machine achetée 20 000 € perd 15 % de sa valeur chaque année : $V_n = 20\,000 \times 0,85^n$. À partir de quelle année vaut-elle moins de 8 000 € ?

$20\,000 \times 0,85^n < 8\,000 \iff 0,85^n < 0,4$. La base 0,85 est inférieure à 1 : $n > \frac{\log(0,4)}{\log(0,85)} \approx 5,64$. Le premier entier est $n = 6$.

Contrôle : $V_5 \approx 8\,874 \text{ €} > 8\,000 \text{ €}$ et $V_6 \approx 7\,543 \text{ €} < 8\,000 \text{ €}$. La machine vaut moins de 8 000 € à partir de la 6^e année.

Exemple — Une inéquation avec le logarithme

$\log(x) \leq -1 \iff 0 < x \leq 10^{-1}$, soit $x \in]0; 0,1]$. La condition $x > 0$ vient de ce que $\log(x)$ n'existe que pour $x > 0$.

Erreur fréquente — Oublier que le sens change

Écrire « $0,85^n < 0,4$ donne $n < 5,64$ » est faux : pour $n = 0$, la machine vaut encore 20 000 €. Une valeur qui **diminue** passe sous un seuil **à partir** d'un certain rang.

Application 8 – Résoudre des inéquations

a. $1,2^x \geq 3$ b. $0,6^x < 0,05$ c. $\log(x) > 2,5$

d. On lâche une balle d'une hauteur de 2 m. On admet qu'à chaque rebond, elle remonte à 70 % de sa hauteur précédente : après n rebonds, elle monte à $2 \times 0,7^n$ mètres. À partir de quel rebond monte-t-elle à moins de 10 cm ?

Correction — Application 8

a. $1,2 > 1$: sens conservé. $x \geq \frac{\log(3)}{\log(1,2)} \approx 6,03$.

b. $0,6 < 1$: le sens change. $x > \frac{\log(0,05)}{\log(0,6)} \approx 5,86$.

c. $x > 10^{2,5} \approx 316,2$.

d. $2 \times 0,7^n < 0,1 \iff 0,7^n < 0,05$; $0,7 < 1$ donc $n > \frac{\log(0,05)}{\log(0,7)} \approx 8,40$. À partir du **9^e rebond**.

Contrôle : $2 \times 0,7^8 \approx 0,115 \text{ m}$ et $2 \times 0,7^9 \approx 0,081 \text{ m}$.

Conduite : au d., faire convertir 10 cm en 0,1 m avant d'écrire l'inéquation.

9 Encadrer une solution par balayage (C4 et C5)

Certaines équations, comme $2^x = x + 3$, mélangent une exponentielle et une fonction affine : le logarithme ne permet pas de les résoudre. Quand on sait qu'une solution existe dans un intervalle, on l'encadre par **balayage**, avec la calculatrice ou un tableur.

Méthode — Le balayage

1. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ aux deux bornes de l'intervalle : l'ordre doit s'inverser.
2. Dresser un tableau de valeurs avec un pas de 0,1 : repérer les deux valeurs de x entre lesquelles l'ordre s'inverse.
3. Recommencer entre ces deux valeurs avec un pas de 0,01.
4. Conclure par un encadrement, qui donne une valeur approchée au centième.

Exemple — Résoudre $2^x = x + 3$ sur $[2; 3]$

En $x = 2$: $2^2 = 4 < 5$. En $x = 3$: $2^3 = 8 > 6$. L'ordre s'inverse : une solution est dans $[2; 3]$.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
2^x	4	4,287	4,595	4,925	5,278	5,657
$x + 3$	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5

L'ordre s'inverse entre 2,4 et 2,5. Au pas de 0,01 : $2^{2,44} \approx 5,426 < 5,44$ et $2^{2,45} \approx 5,464 > 5,45$. La solution vérifie $2,44 < x < 2,45$.

Remarque — Le même balayage en langage Python

Le programme avance de 0,01 en 0,01 tant que 2^x reste inférieur à $x + 3$, puis affiche la première valeur pour laquelle l'ordre s'est inversé.

```
x = 2
while 2**x < x + 3:
    x = x + 0.01
print(round(x, 2))    # affiche 2.45
```

Application 9 – Un balayage à la calculatrice

On cherche la solution de $3^x = 10 - x$ sur $[1; 2]$.

a. Comparer 3^x et $10 - x$ pour $x = 1$ et pour $x = 2$.

b. Compléter le tableau (arrondir au millième), puis donner un encadrement de la solution d'amplitude 0,1.

x	1,8	1,9	2
3^x			
$10 - x$			

c. Poursuivre au pas de 0,01 pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,01.

Correction — Application 9

a. $x = 1$: $3^1 = 3 < 9$. $x = 2$: $3^2 = 9 > 8$. L'ordre s'inverse.

b. $3^{1,8} \approx 7,225 < 8,2$; $3^{1,9} \approx 8,064 < 8,1$; $3^2 = 9 > 8$. Donc $1,9 < x < 2$.

c. $3^{1,90} \approx 8,064 < 8,10$ et $3^{1,91} \approx 8,153 > 8,09$: la solution vérifie $1,90 < x < 1,91$.

Conduite : au b., l'écart en 1,9 est très faible (8,064 contre 8,1) ; c'est l'occasion de montrer qu'arrondir trop tôt fait conclure à tort.

10 Chimie et signaux : le pH et les décibels (C3 et C4)

Deux grandeurs de physique-chimie s'expriment à l'aide du logarithme décimal.

Définition — pH d'une solution aqueuse

$$\text{pH} = -\log \left([\text{H}_3\text{O}^+] \right)$$

où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ est la concentration en ions oxonium, exprimée en mol/L. Réciproquement, $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$. Quand la concentration est multipliée par 10, le pH **diminue** de 1.

Définition — Niveau d'intensité acoustique

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad \text{avec } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

I est l'intensité sonore, en W/m^2 , et L le niveau, en décibels (dB). Réciproquement, $I = I_0 \times 10^{L/10}$.

Exemple — Pluie et bruit

Pluie. Une pluie non polluée a un pH voisin de 5,6 : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5,6} \approx 2,5 \times 10^{-6} \text{ mol/L}$. Une pluie acide de pH 4,2 contient $10^{-4,2} \approx 6,3 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$ d'ions oxonium, soit $10^{1,4} \approx 25$ fois plus.

Bruit. Pour $I = 10^{-4} \text{ W/m}^2$, $L = 10 \log (10^8) = 80 \text{ dB}$. Deux machines identiques côte à côte doublent l'intensité : $L = 10 \log (2 \times 10^8) = 10 (\log 2 + 8) \approx 83 \text{ dB}$. Le niveau augmente de 3 dB ; il ne double pas.

Application 10 – pH et décibels

- Une solution a une concentration $[\text{H}_3\text{O}^+] = 4,0 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$. Calculer son pH, arrondi au dixième.
- L'eau de mer en surface a aujourd'hui un pH voisin de 8,1. Calculer $[\text{H}_3\text{O}^+]$.
- Calculer le niveau d'intensité acoustique pour $I = 3,2 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$, arrondi à l'unité.
- Pour quelles intensités I le niveau est-il supérieur ou égal à 80 dB ?

Correction — Application 10

- $\text{pH} = -\log (4,0 \times 10^{-3}) \approx 2,4$.
- $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8,1} \approx 7,9 \times 10^{-9} \text{ mol/L}$.
- $L = 10 \log (3,2 \times 10^8) \approx 85 \text{ dB}$.
- $10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \geq 80 \iff \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \geq 8 \iff \frac{I}{10^{-12}} \geq 10^8 \iff I \geq 10^{-4} \text{ W/m}^2$.
Conduite : au d., la fonction log étant croissante, le sens de l'inégalité est conservé à chaque étape.

Bilan – Je sais faire

À retenir

Fonction exponentielle de base q ($q > 0$, $q \neq 1$) : $f(x) = q^x$, définie sur $\mathbb{R}$, toujours strictement positive, $q^0 = 1$. Croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$. Elle prolonge la suite géométrique q^n .

Propriétés : $q^{x+y} = q^x q^y$; $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$; $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$; $(q^x)^y = q^{xy}$.

Logarithme décimal : pour $b > 0$, $\log(b)$ est l'unique solution de $10^x = b$. $\log(10^x) = x$, $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$. Fonction croissante sur $]0; +\infty[$.

Propriétés : $\log(ab) = \log a + \log b$; $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log(a^x) = x \log a$.

Résoudre : $q^x = a \iff x = \frac{\log a}{\log q}$ ($a > 0$) ; $\log(x) = a \iff x = 10^a$. Pour une inéquation, le sens change si $0 < q < 1$.

Méthode — Choisir la bonne méthode

- **Calculer une image q^x** : touche puissance, exposant entre parenthèses (§1).
- **Tracer une courbe** : tableau de valeurs, points, courbe lisse (§2 et §5).
- **Transformer une écriture** : propriétés opératoires (§3 et §6).
- **L'inconnue est en exposant** : logarithme des deux membres (§7).
- **L'inconnue est dans un logarithme** : puissance de 10 (§7).
- **Une inégalité** : résoudre l'équation, puis utiliser le sens de variation (§8).
- **Exponentielle et fonction affine mélangées** : balayage (§9).

Méthode — Vérifier sa réponse

1. En remplaçant x par la valeur trouvée, retrouve-t-on le second membre ?
2. Une exponentielle positive ne peut pas égaler un nombre négatif.
3. Avec une base inférieure à 1, le sens de l'inégalité a-t-il changé ?
4. Si l'inconnue est un nombre d'années ou de rebonds, ai-je donné le premier **entier** qui convient, et vérifié les deux entiers qui l'encadrent ?

Remarque — Ce que ce chapitre ne demande pas

Le logarithme népérien, noté $\ln$, et le nombre e relèvent d'un module complémentaire de préparation à la poursuite d'études : ils ne sont employés nulle part ici. Le calcul des intérêts composés relève d'un module réservé aux spécialités sans physique-chimie.