

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 5****Fonctions exponentielles et logarithme décimal**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les cinq capacités du chapitre, dans l'ordre du cours. La calculatrice scientifique est nécessaire (touche **log**, jamais « ln »), ainsi qu'une règle et un crayon : plusieurs exercices demandent de **tracer** une courbe. Écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec son unité quand la grandeur en a une. Pour une inéquation, dire à chaque fois si le sens de l'inégalité change. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Représenter graphiquement les fonctions exponentielles de base q , définies sur un intervalle donné, par $x \mapsto q^x$ (avec q nombre réel strictement positif et différent de 1)	1 à 5	2
C2 – Utiliser les propriétés opératoires des fonctions exponentielles étudiées pour transformer des écritures numériques ou littérales	6 à 10	7
C3 – Représenter graphiquement la fonction logarithme décimal sur un intervalle donné ; variations et propriétés opératoires	11 à 16	8
C4 – Résoudre par le calcul, graphiquement ou à l'aide d'outils numériques des équations du type $q^x = a$ et $\log(x) = a$	17 à 22	11
C5 – Résoudre par le calcul, graphiquement ou à l'aide d'outils numériques des inéquations du type $q^x \geq a$ (ou $q^x \leq a$) et $\log(x) \geq a$ (ou $\log(x) \leq a$)	23 à 28	14
C4 et C5 – à l'aide d'outils numériques : encadrer une solution par balayage	29 et 30	16

Dans chaque capacité, les exercices vont de l'application guidée au contrôle d'un résultat ou à l'analyse d'une erreur. Le logarithme népérien et le nombre e ne figurent pas au programme de ce chapitre : aucun exercice ne les emploie.

C1 – Représenter graphiquement les fonctions exponentielles de base q , définies sur un intervalle donné, par $x \mapsto q^x$ (avec q nombre réel strictement positif et différent de 1)

Exigible. Prérequis : suites géométriques, coefficient multiplicateur.

Rappel de cours

$f(x) = q^x$, avec $q > 0$ et $q \neq 1$, prolonge la suite géométrique q^n entre les entiers. On a toujours $q^x > 0$ et $q^0 = 1$: la courbe passe par $(0; 1)$ et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

Si $q > 1$, f est croissante ; si $0 < q < 1$, f est décroissante.

Tracer : tableau de valeurs à la calculatrice, points, courbe **lisse**. Une hausse de $t\%$ correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$, une baisse à $q = 1 - \frac{t}{100}$.

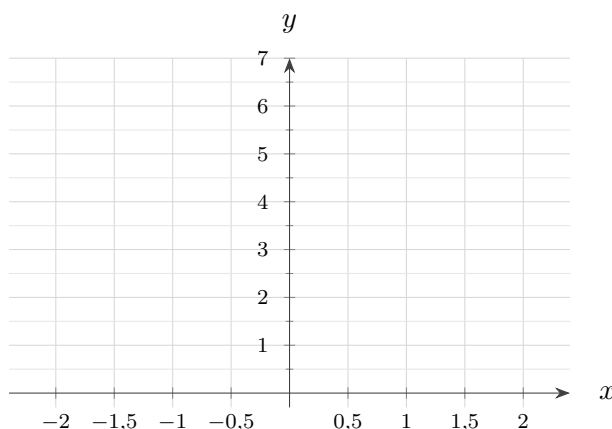
Exercice 1 — Tableau de valeurs et courbe

On considère la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = 2,5^x$.

a. Compléter le tableau de valeurs (arrondir au centième).

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

b. Placer les points dans le repère, puis tracer la courbe de f .

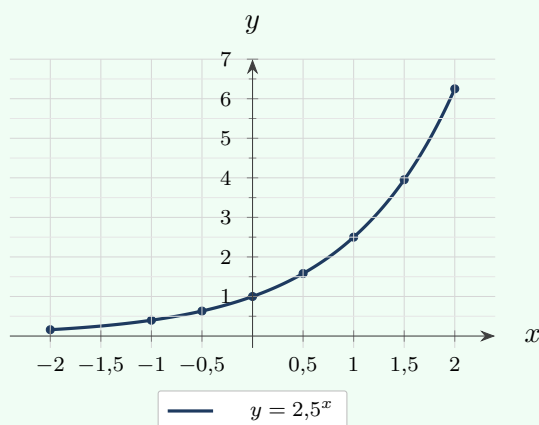


Repère vierge : x de -2 à 2 , gradué de $0,5$ en $0,5$; $f(x)$ de 0 à 7 .

c. La fonction f est-elle croissante ou décroissante sur $[-2; 2]$? Justifier par la valeur de q .

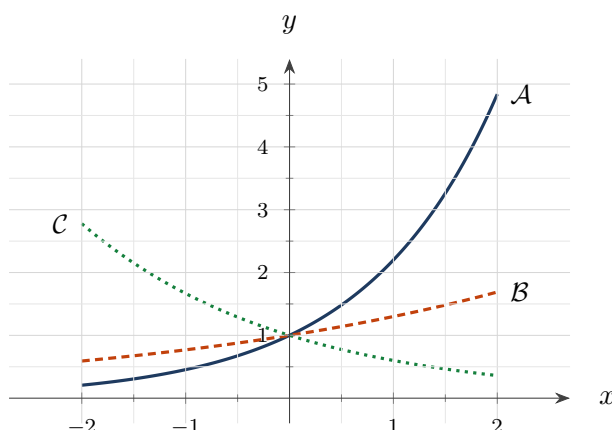
Correction de l'exercice 1**a.**

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0,16	0,4	0,63	1	1,58	2,5	3,95	6,25

b.**c.** $q = 2,5 > 1$: f est **croissante** sur $[-2 ; 2]$.*Conduite* : exiger une courbe lisse passant par $(0 ; 1)$, qui ne touche pas l'axe des abscisses à gauche.**Exercice 2 — Croissante ou décroissante ?****a.** Pour chaque fonction, donner la base q et le sens de variation sur $\mathbb{R}$: $f_1(x) = 1,08^x$; $f_2(x) = 0,92^x$; $f_3(x) = 4^x$; $f_4(x) = 0,25^x$.**b.** Une quantité augmente de 6 % par an ; une autre diminue de 35 % par an. Pour chacune, écrire la fonction qui donne le coefficient multiplicateur au bout de x années, puis son sens de variation.**c.** Sans calculer, comparer $1,08^{3,5}$ et $1,08^{4,2}$, puis $0,92^{3,5}$ et $0,92^{4,2}$. Contrôler à la calculatrice.**Correction de l'exercice 2****a.** f_1 : $q = 1,08 > 1$, croissante. f_2 : $q = 0,92 < 1$, décroissante. f_3 : $q = 4 > 1$, croissante. f_4 : $q = 0,25 < 1$, décroissante.**b.** Hausse de 6 % : coefficient 1,06, fonction $x \mapsto 1,06^x$, croissante. Baisse de 35 % : coefficient $1 - 0,35 = 0,65$, fonction $x \mapsto 0,65^x$, décroissante.**c.** $3,5 < 4,2$ et $x \mapsto 1,08^x$ est croissante, donc $1,08^{3,5} < 1,08^{4,2}$ ($1,309 < 1,382$). La fonction $x \mapsto 0,92^x$ est décroissante, donc $0,92^{3,5} > 0,92^{4,2}$ ($0,747 > 0,705$).

Exercice 3 — Reconnaître trois courbes

Trois courbes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont tracées sur $[-2; 2]$. Ce sont celles des fonctions $x \mapsto 1,3^x$, $x \mapsto 0,6^x$ et $x \mapsto 2,2^x$, dans le désordre.



Trois courbes : $\mathcal{A}$ en trait plein, $\mathcal{B}$ en tirets, $\mathcal{C}$ en pointillés. Chaque lettre est placée à l'extrémité de sa courbe.

- Quelle courbe représente une fonction décroissante ? En déduire à quelle fonction elle correspond.
- Pour les deux autres courbes, lire l'ordonnée du point d'abscisse 1 et conclure.
- Quel point les trois courbes ont-elles en commun ? Pourquoi ?

Correction de l'exercice 3

- Seule $\mathcal{C}$ descend : c'est la courbe d'une fonction décroissante, donc de $x \mapsto 0,6^x$, la seule dont la base est comprise entre 0 et 1.
- En $x = 1$, $q^1 = q$: $\mathcal{A}$ passe par $(1; 2,2)$ et $\mathcal{B}$ par $(1; 1,3)$. Donc $\mathcal{A}$ est la courbe de $x \mapsto 2,2^x$ et $\mathcal{B}$ celle de $x \mapsto 1,3^x$.
- Le point $(0; 1)$, car $q^0 = 1$ pour toute base q .

Exercice 4 — Des algues sur un étang

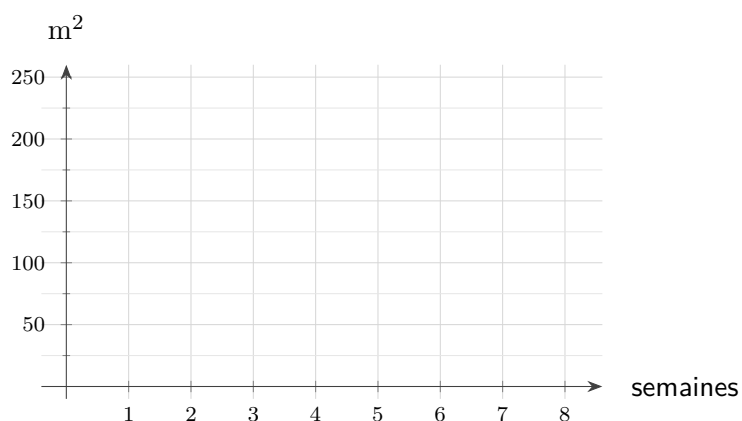
Sur un étang, des algues couvrent 40 m^2 . On admet que la surface couverte augmente de 25% chaque semaine.

a. On note u_n la surface couverte, en m^2 , au bout de n semaines. Justifier que $u_n = 40 \times 1,25^n$, puis calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b. On prolonge ce modèle par $f(x) = 40 \times 1,25^x$ pour tout réel x de $[0; 8]$. Calculer $f(2,5)$, arrondi au dixième, et interpréter.

c. Compléter le tableau (arrondir au dixième), puis tracer la courbe de f .

x (semaines)	0	2	4	6	8
$f(x)$ (m^2)					

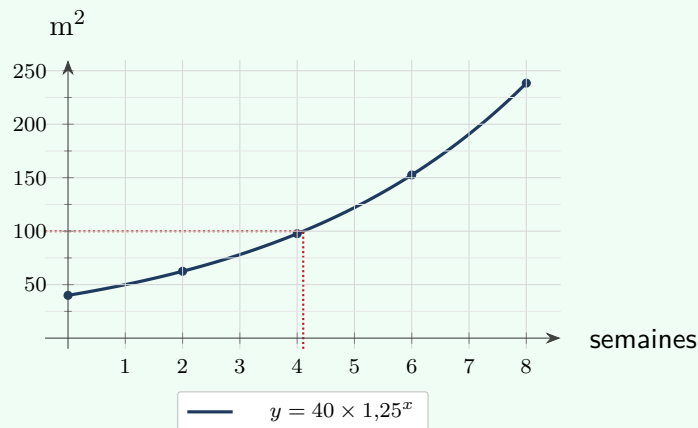


Repère vierge : temps en semaines de 0 à 8 ; surface en m^2 de 0 à 250, graduée de 25 en 25.

d. Lire sur la courbe au bout de combien de semaines la surface atteint 100 m^2 .

Correction de l'exercice 4

- a. Augmenter de 25 %, c'est multiplier par 1,25 : (u_n) est géométrique de premier terme 40 et de raison 1,25, donc $u_n = 40 \times 1,25^n$. $u_1 = 50$; $u_2 = 62,5$; $u_3 \approx 78,1$ (m^2).
- b. $f(2,5) = 40 \times 1,25^{2,5} \approx 69,9$: au bout de deux semaines et demie, les algues couvrent environ $69,9 \text{ m}^2$.
- c. $f(0) = 40$; $f(2) = 62,5$; $f(4) \approx 97,7$; $f(6) \approx 152,6$; $f(8) \approx 238,4$.



- d. On lit environ 4,1 semaines (le calcul du chapitre donne 4,11).

Exercice 5 — Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier.

- a. « La courbe de $x \mapsto 0,4^x$ coupe l'axe des abscisses vers $x = 6$, puisque la calculatrice affiche $0,4^6 \approx 0,004$. »
- b. « La fonction $x \mapsto 1,02^x$ est décroissante, car 1,02 est très proche de 1. »
- c. « Pour $x = -1$, le nombre 3^x est négatif. »

Correction de l'exercice 5

- a. Faux. $0,4^6 = 0,004\,096$ est petit mais **strictement positif**. Une exponentielle ne s'annule jamais : la courbe se rapproche de l'axe sans le couper.
- b. Faux. $1,02 > 1$: la fonction est **croissante**, même si elle croît lentement.
- c. Faux. $3^{-1} = \frac{1}{3} > 0$. Un exposant négatif donne un inverse, pas un nombre négatif.

C2 – Utiliser les propriétés opératoires des fonctions exponentielles étudiées pour transformer des écritures numériques ou littérales

Exigible. Prérequis : C1, règles des puissances entières.

Rappel de cours

Pour $q > 0$ et tous réels x et y :

$$q^{x+y} = q^x \times q^y \quad q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y} \quad q^{-x} = \frac{1}{q^x} \quad (q^x)^y = q^{xy}$$

Les exposants s'ajoutent quand on **multiplie** deux puissances de même base ; ils se multiplient quand on élève une puissance à une puissance. Rien ne se simplifie pour une **somme** $q^x + q^y$, ni pour deux bases différentes.

Exercice 6 — Une seule puissance

Écrire chaque nombre sous la forme d'une seule puissance, puis le calculer sans calculatrice.

- a. $7^{2,3} \times 7^{0,7}$ b. $\frac{10^{4,5}}{10^{1,5}}$ c. $(6^{1,5})^2$ d. $2^{-3} \times 2^5$ e. $9^{0,5}$, en écrivant $9 = 3^2$.

Correction de l'exercice 6

- a. $7^{2,3+0,7} = 7^3 = 343$ b. $10^{4,5-1,5} = 10^3 = 1\,000$ c. $6^{1,5 \times 2} = 6^3 = 216$ d. $2^{-3+5} = 2^2 = 4$ e. $9^{0,5} = (3^2)^{0,5} = 3^1 = 3$.

Exercice 7 — Transformer des écritures littérales

Montrer que, pour tout réel x :

- a. $4 \times 2^x = 2^{x+2}$ b. $9^x = 3^{2x}$ c. $0,5^{-x} = 2^x$ d. $10^{x+1} - 10^x = 9 \times 10^x$.

Correction de l'exercice 7

- a. $4 \times 2^x = 2^2 \times 2^x = 2^{2+x}$.
 b. $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$.
 c. $0,5^{-x} = (0,5^{-1})^x = 2^x$, car $0,5^{-1} = \frac{1}{0,5} = 2$.
 d. $10^{x+1} = 10 \times 10^x$, donc $10^{x+1} - 10^x = 10 \times 10^x - 10^x = 9 \times 10^x$.
 Conduite : au d., on factorise 10^x ; ce n'est pas 10^1 .

Exercice 8 — D'une heure à une journée

On admet qu'une culture de micro-algues augmente de 5 % par heure : $N(t) = N_0 \times 1,05^t$, où t est le temps en heures.

- a. Montrer que $N(t+24) = 1,05^{24} \times N(t)$. Par combien la culture est-elle multipliée en une journée ? Arrondir au centième.
 b. Montrer que $N(t+0,5) = 1,05^{0,5} \times N(t)$. Calculer $1,05^{0,5}$ à 0,0001 près. L'augmentation par demi-heure est-elle de 2,5 % ?
 c. Un élève affirme : « en 24 heures, la hausse est de $24 \times 5 = 120\%$ ». Que lui répondre ?

Correction de l'exercice 8

- a. $N(t+24) = N_0 \times 1,05^t \times 1,05^{24} = 1,05^{24} \times N(t)$, et $1,05^{24} \approx 3,23$: en une journée, la culture est multipliée par environ 3,23.
 b. De même $N(t+0,5) = 1,05^{0,5} \times N(t)$, avec $1,05^{0,5} \approx 1,0247$: la hausse par demi-heure est d'environ 2,47 %, un peu moins que 2,5 %.
 c. Les hausses se multiplient : en 24 heures, la culture est multipliée par 3,225, soit une hausse d'environ 222,5 %, et non de 120 %.

Exercice 9 — La période de l'iode 131

L'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, a une période radioactive de 8,02 jours : au bout de 8,02 jours, la moitié de ses noyaux s'est désintégrée. La proportion de noyaux restants au bout de t jours est

$$p(t) = 0,5^{t/8,02}.$$

- a. Calculer $p(8,02)$ et $p(24,06)$, puis interpréter.
 b. À l'aide d'une propriété opératoire, montrer que $p(t+8,02) = 0,5 \times p(t)$.
 c. Calculer $p(30)$, arrondi au millièm, et l'exprimer en pourcentage.

Correction de l'exercice 9

- a. $p(8,02) = 0,5^1 = 0,5$: il reste la moitié des noyaux au bout d'une période. $p(24,06) = 0,5^3 = 0,125$: au bout de trois périodes, il reste 12,5 % des noyaux.
- b. $p(t + 8,02) = 0,5^{\frac{t+8,02}{8,02}} = 0,5^{\frac{t}{8,02} + 1} = 0,5^{\frac{t}{8,02}} \times 0,5^1 = 0,5 \times p(t)$.
- c. $p(30) = 0,5^{30/8,02} \approx 0,075$: il reste environ 7,5 % des noyaux au bout de 30 jours.

Exercice 10 — Quatre égalités à contrôler

Un élève a écrit les quatre égalités ci-dessous. Pour chacune, dire si elle est juste ; sinon, la corriger.

- (1) $2^3 \times 2^4 = 4^7$ (2) $3^x + 3^x = 3^{2x}$ (3) $(5^2)^3 = 5^5$ (4) $\frac{6^{2,5}}{6^{0,5}} = 6^5$

Correction de l'exercice 10

- (1) Faux : la base ne change pas, les exposants s'ajoutent. $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$ (alors que $4^7 = 16\,384$).
- (2) Faux : $3^x + 3^x = 2 \times 3^x$. Contrôle avec $x = 1$: $3 + 3 = 6$, alors que $3^2 = 9$.
- (3) Faux : les exposants se multiplient. $(5^2)^3 = 5^6 = 15\,625$.
- (4) Faux : les exposants se soustraient. $6^{2,5-0,5} = 6^2 = 36$.

C3 – Représenter graphiquement la fonction logarithme décimal sur un intervalle donné

Exigible, avec les connaissances associées du programme : définition, variations et propriétés opératoires. Prérequis : puissances de 10, C1.

Rappel de cours

Pour $b > 0$, $\log(b)$ est l'unique solution de $10^x = b$: $\log(b) = x \iff 10^x = b$. $\log(10^x) = x$; $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$.

$\log$ est définie et **croissante** sur $]0; +\infty[$; négative entre 0 et 1, positive après 1.

Pour $a > 0$, $b > 0$ et x réel : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$; $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$; $\log(a^x) = x \log(a)$.

$\log(a + b)$ ne se simplifie pas.

Exercice 11 — Sans calculatrice

Donner la valeur exacte, sans calculatrice.

- a. $\log(100\,000)$ b. $\log(0,0001)$ c. $\log(10^{1,7})$ d. $\log(1)$ e. $10^{\log(3,5)}$ f. $\log(10^{-0,2})$

Correction de l'exercice 11

- a. $\log(10^5) = 5$ b. $\log(10^{-4}) = -4$ c. 1,7 d. 0 e. 3,5 f. -0,2.

Tous ces résultats viennent de $\log(10^x) = x$ et de $10^{\log(b)} = b$.

Exercice 12 — Estimer avant de calculer

- a. Sans calculatrice, encadrer chaque nombre par deux entiers consécutifs : $\log(8)$; $\log(350)$; $\log(0,07)$; $\log(12\,000)$.
- b. Contrôler à la calculatrice (arrondir au millièmes).
- c. Sans calculatrice, ranger ces quatre logarithmes dans l'ordre croissant, et justifier.

Correction de l'exercice 12

a. et b. $1 < 8 < 10$ donc $0 < \log(8) < 1$ ($\log(8) \approx 0,903$). $100 < 350 < 1\,000$ donc $2 < \log(350) < 3$ ($\approx 2,544$). $0,01 < 0,07 < 0,1$ donc $-2 < \log(0,07) < -1$ ($\approx -1,155$). $10\,000 < 12\,000 < 100\,000$ donc $4 < \log(12\,000) < 5$ ($\approx 4,079$).

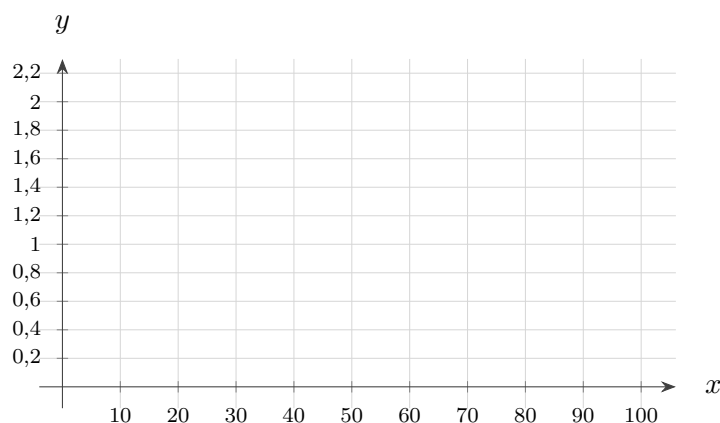
c. La fonction $\log$ est croissante : les logarithmes sont rangés comme les nombres. $\log(0,07) < \log(8) < \log(350) < \log(12\,000)$.

Exercice 13 — La courbe du logarithme de 1 à 100

a. Compléter le tableau (arrondir au centième).

x	1	5	10	20	40	60	80	100
$\log(x)$								

b. Tracer la courbe de la fonction $\log$ sur $[1 ; 100]$.



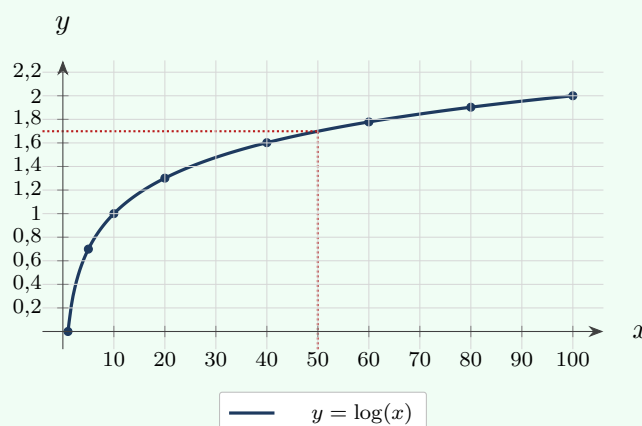
Repère vierge : x de 0 à 100, gradué de 10 en 10 ; $\log(x)$ de 0 à 2,2, gradué de 0,2 en 0,2.

- c.** Donner le sens de variation de la fonction $\log$ sur $[1 ; 100]$.
d. Lire sur la courbe une valeur approchée de $\log(50)$.

Correction de l'exercice 13

a. $\log(1) = 0$; $\log(5) \approx 0,70$; $\log(10) = 1$; $\log(20) \approx 1,30$; $\log(40) \approx 1,60$; $\log(60) \approx 1,78$; $\log(80) \approx 1,90$; $\log(100) = 2$.

b.



c. La fonction $\log$ est croissante sur $[1 ; 100]$: elle passe de 0 à 2.

d. On lit $\log(50) \approx 1,7$ (la calculatrice donne 1,699).

Conduite : faire remarquer que x est multiplié par 100 alors que $\log(x)$ n'augmente que de 2.

Exercice 14 — Calculer avec $\log 2$ et $\log 3$

On donne $\log(2) \approx 0,301$ et $\log(3) \approx 0,477$. Calculer sans calculatrice, en écrivant la propriété utilisée :

a. $\log(6)$ b. $\log(12)$ c. $\log(18)$ d. $\log(1,5)$ e. $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

Correction de l'exercice 14

a. $\log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0,778$.

b. $\log(2^2 \times 3) = 2\log(2) + \log(3) \approx 1,079$.

c. $\log(2 \times 3^2) = \log(2) + 2\log(3) \approx 1,255$.

d. $\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(3) - \log(2) \approx 0,176$.

e. $\log\left(\frac{2}{3}\right) = \log(2) - \log(3) \approx -0,176$.

Exercice 15 — Un seul logarithme

a. Écrire à l'aide d'un seul logarithme, puis calculer sans calculatrice : $\log(5) + \log(20)$; $\log(800) - \log(8)$; $3\log(2) + \log(125)$; $\log(50) + \log(2) - \log(10)$.

b. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\log(1\,000x) = 3 + \log(x)$.

Correction de l'exercice 15

a. $\log(5 \times 20) = \log(100) = 2$ $\log\left(\frac{800}{8}\right) = \log(100) = 2$ $\log(2^3 \times 125) = \log(1\,000) = 3$
 $\log\left(\frac{50 \times 2}{10}\right) = \log(10) = 1$.

b. $\log(1\,000x) = \log(1\,000) + \log(x) = 3 + \log(x)$.

Exercice 16 — *Trois égalités fausses*

Chacune des égalités ci-dessous est fausse. Le montrer à la calculatrice, puis écrire l'égalité correcte.

(1) $\log(3 \times 4) = \log(3) \times \log(4)$ (2) $\log\left(\frac{100}{4}\right) = \frac{\log(100)}{\log(4)}$ (3) $\log(-5) = -\log(5)$

Correction de l'exercice 16

(1) $\log(12) \approx 1,079$, alors que $\log(3) \times \log(4) \approx 0,477 \times 0,602 \approx 0,287$. Correct : $\log(3 \times 4) = \log(3) + \log(4)$.

(2) $\log(25) \approx 1,398$, alors que $\frac{2}{\log(4)} \approx 3,322$. Correct : $\log\left(\frac{100}{4}\right) = \log(100) - \log(4) \approx 2 - 0,602 = 1,398$.

(3) $\log(-5)$ n'existe pas. Correct : $-\log(5) = \log\left(\frac{1}{5}\right) = \log(0,2)$.

C4 – Résoudre par le calcul, graphiquement ou à l'aide d'outils numériques des équations du type $q^x = a$ et $\log(x) = a$

Exigible. Prérequis : C1 et C3.

Rappel de cours

Par le calcul : pour $a > 0$, $q^x = a \iff x = \frac{\log(a)}{\log(q)}$; $10^x = a \iff x = \log(a)$; $\log(x) = a \iff x = 10^a$. Si $a \leq 0$, $q^x = a$ n'a pas de solution.

Graphiquement : abscisse du point commun à la courbe et à la droite horizontale $y = a$.

Contrôle : remplacer x par la valeur trouvée.

Exercice 17 — *Puissance de 10 et logarithme*

Résoudre chaque équation ; arrondir au millième si nécessaire.

a. $10^x = 250$ b. $10^x = 0,004$ c. $\log(x) = 3$ d. $\log(x) = -1,2$ e. $\log(x) = 0,5$

Correction de l'exercice 17

a. $x = \log(250) \approx 2,398$ b. $x = \log(0,004) \approx -2,398$ c. $x = 10^3 = 1\,000$ d. $x = 10^{-1,2} \approx 0,063$
e. $x = 10^{0,5} \approx 3,162$.

Contrôle : $10^{2,398} \approx 250$; $\log(0,063) \approx -1,2$.

Exercice 18 — *L'inconnue en exposant*

Résoudre chaque équation ; arrondir au centième si nécessaire.

a. $4^x = 64$, sans calculatrice b. $1,5^x = 10$ c. $0,8^x = 0,1$ d. $1,03^x = 2$ e. $5^x = 0$

Correction de l'exercice 18

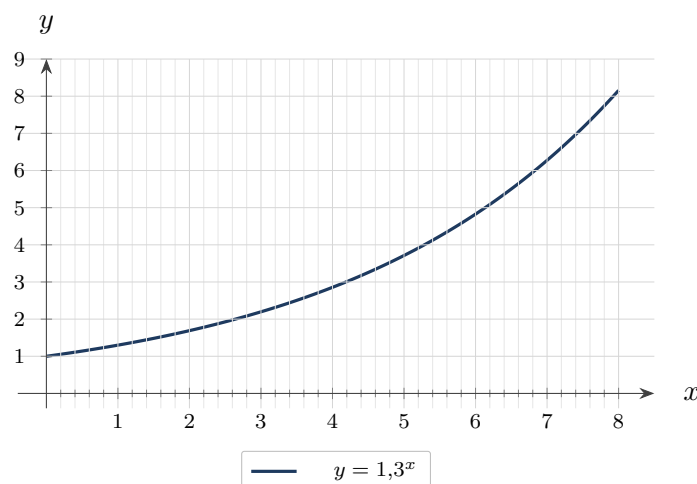
a. $64 = 4^3$, donc $x = 3$.

b. $x = \frac{\log(10)}{\log(1,5)} \approx 5,68$. c. $x = \frac{\log(0,1)}{\log(0,8)} \approx 10,32$. d. $x = \frac{\log(2)}{\log(1,03)} \approx 23,45$.

e. Pas de solution : $5^x > 0$ pour tout x .

Exercice 19 — Lire, puis calculer

La courbe de la fonction g définie sur $[0; 8]$ par $g(x) = 1,3^x$ est tracée ci-dessous.

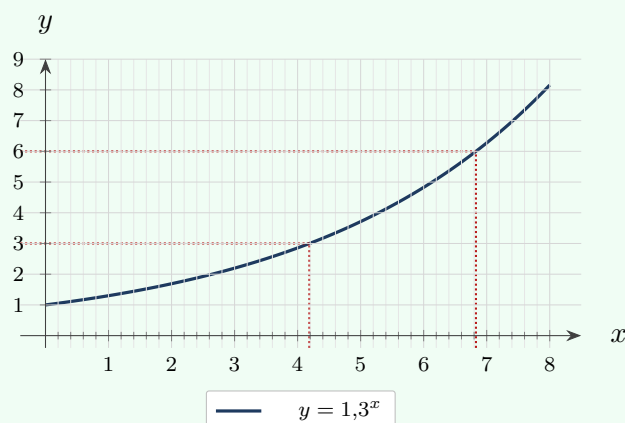


Courbe de $x \mapsto 1,3^x$ sur $[0; 8]$; abscisses graduées de 0,2 en 0,2, ordonnées de 1 en 1.

- Lire une valeur approchée de la solution de $g(x) = 3$, puis de celle de $g(x) = 6$.
- Résoudre ces deux équations par le calcul (arrondir au centième) et comparer avec les lectures.
- Pourquoi l'équation $g(x) = 0,5$ n'a-t-elle pas de solution dans $[0; 8]$?

Correction de l'exercice 19

a.



On lit $x \approx 4,2$ pour $g(x) = 3$ et $x \approx 6,8$ pour $g(x) = 6$.

- $x = \frac{\log(3)}{\log(1,3)} \approx 4,19$ et $x = \frac{\log(6)}{\log(1,3)} \approx 6,83$: les lectures sont justes au dixième près.
- g est croissante et $g(0) = 1$: sur $[0; 8]$, $g(x) \geq 1 > 0,5$.

Exercice 20 — Le temps de doublement d'une culture

On admet que, dans un milieu de culture, le nombre de bactéries augmente de 18 % par heure : $N(t) = N_0 \times 1,18^t$, t en heures.

- Écrire l'équation qui traduit « le nombre de bactéries a doublé ».
- La résoudre ; donner le résultat en heures et minutes.
- Ce temps de doublement dépend-il du nombre N_0 de départ ?

Correction de l'exercice 20

- a. $N_0 \times 1,18^t = 2N_0$, soit $1,18^t = 2$.
 b. $t = \frac{\log(2)}{\log(1,18)} \approx 4,188$ h. Or $0,188 \times 60 \approx 11$: le nombre double en 4 h 11 min environ.
 c. Non : N_0 disparaît en divisant les deux membres par N_0 . Le temps de doublement ne dépend que du coefficient 1,18.

Exercice 21 — Il ne reste que 10 %

On reprend l'iode 131 de l'exercice 9 : $p(t) = 0,5^{t/8,02}$. Au bout de combien de jours ne reste-t-il que 10 % des noyaux ?

- a. Écrire l'équation à résoudre.
 b. La résoudre ; arrondir au dixième.
 c. Contrôler le résultat.

Correction de l'exercice 21

- a. $0,5^{t/8,02} = 0,1$.
 b. $\frac{t}{8,02} = \frac{\log(0,1)}{\log(0,5)}$, donc $t = 8,02 \times \frac{\log(0,1)}{\log(0,5)} \approx 26,6$ jours.
 c. $0,5^{26,6/8,02} \approx 0,100$. Il faut un peu plus de trois périodes, ce qui est cohérent : après trois périodes il reste 12,5 %.

Exercice 22 — Retrouver une grandeur à partir de son logarithme

- a. Le pH d'une solution vaut 3,2. Sachant que $\text{pH} = -\log([H_3O^+])$, calculer la concentration $[H_3O^+]$, en mol/L.
 b. Un sonomètre indique un niveau d'intensité acoustique de 94 dB. Sachant que $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, calculer l'intensité sonore I .
 c. Calculer l'intensité qui correspond à 97 dB. Comparer avec celle du b.

Correction de l'exercice 22

- a. $-\log([H_3O^+]) = 3,2$, donc $[H_3O^+] = 10^{-3,2} \approx 6,3 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$.
 b. $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 9,4$, donc $I = 10^{-12} \times 10^{9,4} = 10^{-2,6} \approx 2,5 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$.
 c. $I = 10^{-12} \times 10^{9,7} = 10^{-2,3} \approx 5,0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$: l'intensité a doublé, pour 3 dB de plus.

C5 – Résoudre par le calcul, graphiquement ou à l'aide d'outils numériques des inéquations du type $q^x \geq a$ (ou $q^x \leq a$) et $\log(x) \geq a$ (ou $\log(x) \leq a$)

Exigible. Prérequis : C4 et le sens de variation (C1, C3).

Rappel de cours

On résout l'équation, puis on utilise le **sens de variation**.

$q > 1$: fonction croissante, le sens est **conservé**. $0 < q < 1$: fonction décroissante, le sens **change** (on divise par $\log(q) < 0$).

$$\log(x) \geq a \iff x \geq 10^a ; \quad \log(x) \leq a \iff 0 < x \leq 10^a.$$

Pour un nombre d'années, donner le premier **entier** qui convient et contrôler avec les deux entiers qui l'encadrent.

Exercice 23 — *Le sens change-t-il ?*

Résoudre chaque inéquation, en précisant si le sens de l'inégalité change. Arrondir au centième.

- a. $1,5^x \geq 20$ b. $0,9^x \leq 0,3$ c. $2,5^x < 0,1$ d. $0,75^x > 0,05$

Correction de l'exercice 23

- a. $1,5 > 1$, sens conservé : $x \geq \frac{\log(20)}{\log(1,5)} \approx 7,39$.
 b. $0,9 < 1$, le sens change : $x \geq \frac{\log(0,3)}{\log(0,9)} \approx 11,43$.
 c. $2,5 > 1$, sens conservé : $x < \frac{\log(0,1)}{\log(2,5)} \approx -2,51$.
 d. $0,75 < 1$, le sens change : $x < \frac{\log(0,05)}{\log(0,75)} \approx 10,41$.

Exercice 24 — *Inéquations avec le logarithme*

Résoudre chaque inéquation ; donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

- a. $\log(x) \geq 1,5$ b. $\log(x) < -2$ c. $\log(x) \leq 0$ d. $2\log(x) > 3$

Correction de l'exercice 24

La fonction $\log$ est croissante et n'est définie que pour $x > 0$.

- a. $x \geq 10^{1,5} \approx 31,62$: $[10^{1,5}; +\infty[$. b. $0 < x < 10^{-2}$: $]0; 0,01[$. c. $0 < x \leq 1$: $]0; 1]$.
 d. $\log(x) > 1,5$, donc $x > 10^{1,5} \approx 31,62$: $]10^{1,5}; +\infty[$.

Exercice 25 — *La valeur d'un véhicule utilitaire*

Un véhicule utilitaire est acheté 32 000 €. On admet que sa valeur baisse de 18 % par an. On note V_n sa valeur, en euros, au bout de n années.

- a. Exprimer V_n en fonction de n .
 b. À partir de quelle année le véhicule vaut-il moins de 10 000 € ? Résoudre une inéquation.
 c. Contrôler en calculant V_5 et V_6 .

Correction de l'exercice 25

- a. $V_n = 32\,000 \times 0,82^n$.
 b. $32\,000 \times 0,82^n < 10\,000 \iff 0,82^n < 0,3125$. La base est inférieure à 1, le sens change :
 $n > \frac{\log(0,3125)}{\log(0,82)} \approx 5,86$. À partir de la **6^e année**.
 c. $V_5 \approx 11\,864$ € > 10 000 € et $V_6 \approx 9\,728$ € < 10 000 €.

Exercice 26 — *Une casserole qui refroidit*

Une casserole d'eau à 88 °C refroidit dans une pièce à 18 °C. On admet que sa température, en °C, au bout de t minutes est

$$T(t) = 18 + 70 \times 0,97^t.$$

- a. Calculer $T(0)$ et $T(30)$, arrondi au dixième.
 b. Au bout de combien de minutes la température devient-elle inférieure ou égale à 35 °C ?
 c. D'après ce modèle, la température peut-elle descendre sous 18 °C ? Justifier.

Correction de l'exercice 26

- a. $T(0) = 18 + 70 = 88^\circ\text{C}$; $T(30) = 18 + 70 \times 0,97^{30} \approx 46,1^\circ\text{C}$.
- b. $18 + 70 \times 0,97^t \leq 35 \iff 0,97^t \leq \frac{17}{70}$. La base est inférieure à 1 : $t \geq \frac{\log(17/70)}{\log(0,97)} \approx 46,5$. La température passe sous 35°C au bout d'environ 46,5 minutes.
- c. Non : $70 \times 0,97^t > 0$, donc $T(t) > 18$ pour tout t . La température se rapproche de celle de la pièce sans l'atteindre.

Exercice 27 — Plus acide qu'une pluie non polluée

Une pluie non polluée a un pH voisin de 5,6. Une eau est plus acide lorsque son pH est plus petit. On rappelle que $\text{pH} = -\log(c)$, où c est la concentration $[\text{H}_3\text{O}^+]$ en mol/L.

- a. Montrer que $\text{pH} < 5,6$ équivaut à $\log(c) > -5,6$.
- b. En déduire les concentrations pour lesquelles une eau est plus acide qu'une pluie non polluée.
- c. Une pluie acide a souvent un pH compris entre 4,2 et 4,4. Encadrer la concentration c correspondante.

Correction de l'exercice 27

- a. $-\log(c) < 5,6 \iff \log(c) > -5,6$ (on multiplie par -1 , le sens change).
- b. $\log$ est croissante : $c > 10^{-5,6} \approx 2,5 \times 10^{-6}$ mol/L.
- c. $4,2 \leq -\log(c) \leq 4,4 \iff -4,4 \leq \log(c) \leq -4,2 \iff 10^{-4,4} \leq c \leq 10^{-4,2}$, soit environ $4,0 \times 10^{-5} \leq c \leq 6,3 \times 10^{-5}$ mol/L.

Exercice 28 — Une résolution à corriger

Un élève résout $0,6^x < 0,1$ ainsi :

$$x \log(0,6) < \log(0,1) \quad \text{donc} \quad x < \frac{\log(0,1)}{\log(0,6)} \approx 4,51.$$

- a. Le nombre 0 vérifie-t-il l'inéquation de départ ? Vérifie-t-il la réponse de l'élève ?
- b. Quelle erreur l'élève a-t-il commise ?
- c. Écrire la bonne solution.

Correction de l'exercice 28

- a. $0,6^0 = 1$, qui n'est pas inférieur à 0,1 : 0 ne vérifie pas l'inéquation. Pourtant $0 < 4,51$: la réponse de l'élève contient 0. Elle est donc fausse.
- b. $\log(0,6) \approx -0,222$ est **négatif** : en divisant par ce nombre, il fallait changer le sens de l'inégalité.
- c. $x > \frac{\log(0,1)}{\log(0,6)} \approx 4,51$. La fonction $x \mapsto 0,6^x$ est décroissante : elle passe sous 0,1 **après** 4,51.

C4 et C5 – Résoudre à l'aide d'outils numériques : encadrer une solution par balayage

Exemple d'algorithme du programme. Prérequis : C4, tableau de valeurs de la calculatrice.

Rappel de cours

Quand une équation $f(x) = g(x)$ mélange une exponentielle (ou un logarithme) et une fonction affine, on encadre sa solution :

1. vérifier que l'ordre de $f(x)$ et $g(x)$ s'inverse entre les deux bornes ; 2. tableau au pas de 0,1 ; 3. tableau au pas de 0,01 entre les deux valeurs trouvées ; 4. conclure par un encadrement.

Exercice 29 — Un balayage guidé

On cherche la solution de l'équation $1,5^x = 2x$ sur l'intervalle $[6 ; 7]$.

- a. Comparer $1,5^x$ et $2x$ pour $x = 6$ et pour $x = 7$.
 b. Compléter le tableau (arrondir au millièm), puis donner un encadrement de la solution d'amplitude 0,1.

x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5
$1,5^x$						
$2x$						

- c. Poursuivre au pas de 0,01 et donner un encadrement d'amplitude 0,01.

Correction de l'exercice 29

- a. $1,5^6 \approx 11,391 < 12$ et $1,5^7 \approx 17,086 > 14$: l'ordre s'inverse, une solution est dans $[6 ; 7]$.
 b.

x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5
$1,5^x$	11,391	11,862	12,353	12,864	13,396	13,951
$2x$	12	12,2	12,4	12,6	12,8	13

L'ordre s'inverse entre 6,2 et 6,3 : $6,2 < x < 6,3$.

- c. $1,5^{6,21} \approx 12,403 < 12,42$ et $1,5^{6,22} \approx 12,453 > 12,44$: $6,21 < x < 6,22$.

Exercice 30 — Un logarithme et une droite

On cherche la solution de l'équation $\log(x) = 3 - 0,4x$ sur l'intervalle $[5 ; 6]$.

- a. Comparer $\log(x)$ et $3 - 0,4x$ pour $x = 5$ et pour $x = 6$.
 b. Par balayage au pas de 0,1, puis de 0,01, donner un encadrement de la solution d'amplitude 0,01. Présenter les valeurs utiles dans un tableau.
 c. Pourquoi ne peut-on pas résoudre cette équation par la méthode du §7 du cours ?

Correction de l'exercice 30

- a. $\log(5) \approx 0,699 < 1$ et $\log(6) \approx 0,778 > 0,6$: l'ordre s'inverse.
 b. Au pas de 0,1 : $\log(5,6) \approx 0,748 < 0,76$ et $\log(5,7) \approx 0,756 > 0,72$, donc $5,6 < x < 5,7$. Au pas de 0,01 : $\log(5,62) \approx 0,7497 < 0,752$ et $\log(5,63) \approx 0,7505 > 0,748$, donc $5,62 < x < 5,63$.
 c. L'inconnue apparaît à la fois dans un logarithme et dans une expression affine : on ne peut pas l'isoler en prenant une puissance de 10 des deux membres.