

Version professeur

## Mathématiques – Terminale Bac Pro

## Cours et applications

## Chapitre 4

## Fonctions polynômes de degré 3

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

## Rappel de cours — Avant de commencer

Ce chapitre prolonge celui de Première sur la dérivée. Il faut savoir dériver un polynôme de degré 2, dresser un tableau de variations, déterminer le signe d'un polynôme de degré 2 factorisé et tester si un nombre en est racine. Calculatrice graphique nécessaire ; tableur ou logiciel de géométrie dynamique utiles aux §2, §8 et §9.

## Repères et ordre de travail

| Capacité et intitulé complet                                                                                                                                                                                | Partie du cours                                                                                  | Page                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| C1 – Étudier la fonction cube : dérivée, variations, représentation graphique                                                                                                                               | §1 La fonction cube ;<br>§2 Dérivée et variations                                                | 2, 3<br>él. 2, 3         |
| C2 – Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3                                                                    | §3 Dériver un polynôme de degré 3                                                                | 4<br>él. 4               |
| C3 – Dresser, à partir du signe de la dérivée, le tableau de variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3                                                                              | §4 Signe de la dérivée ;<br>§5 Tableau de variations ;<br>§8 Racines de $f'$ à l'outil numérique | 5, 7, 10<br>él. 5, 7, 12 |
| C5 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme $f$ de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer les éventuels extremums locaux de la fonction $f$                                        | §6 Les extremums locaux                                                                          | 8<br>él. 9               |
| C4 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme $f$ de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = c$ , où $c$ est un nombre réel             | §7 Le nombre de solutions de $f(x) = c$                                                          | 9<br>él. 10              |
| Activité numérique du programme – Déterminer un encadrement ou une valeur approchée par balayage d'une solution d'une équation du type $f(x) = g(x)$ lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné | §9 Le balayage                                                                                   | 12<br>él. 13             |
| C2 à C5 – Réinvestissement dans un problème d'optimisation                                                                                                                                                  | §10 La boîte de volume maximal                                                                   | 13<br>él. 14             |

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

## Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

# 1 La fonction cube (C1)

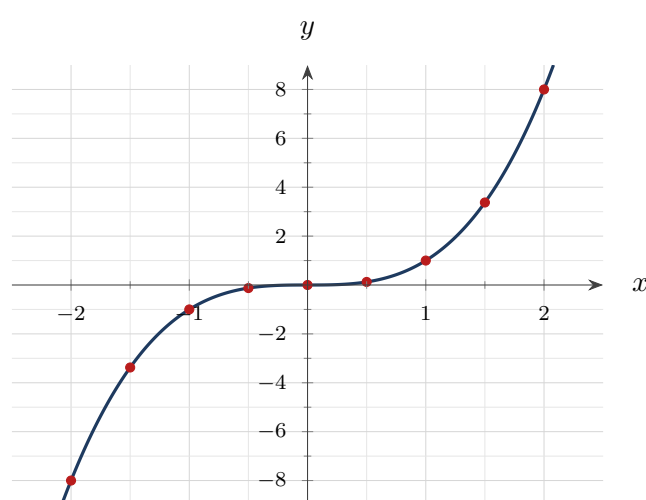
## Définition — La fonction cube

La **fonction cube** est la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par

$$f(x) = x^3 = x \times x \times x$$

Le cube d'un nombre positif est positif ; le cube d'un nombre négatif est **négatif** :  $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ .

| $x$          | -2 | -1,5   | -1 | -0,5   | 0 | 0,5   | 1 | 1,5   | 2 |
|--------------|----|--------|----|--------|---|-------|---|-------|---|
| $f(x) = x^3$ | -8 | -3,375 | -1 | -0,125 | 0 | 0,125 | 1 | 3,375 | 8 |



—  $f(x) = x^3$  • points du tableau

Repère :  $x$  en abscisse,  $y = f(x)$  en ordonnée ; la grille est tracée tous les 0,5 horizontalement et tous les 1 verticalement.  
 Courbe bleue : la fonction cube sur  $[-2; 2]$  ; points rouges : les neuf valeurs du tableau.

## Remarque — Ce que la courbe montre

La courbe passe par l'origine et monte de gauche à droite. Deux nombres opposés ont des cubes opposés :  $1,5^3 = 3,375$  et  $(-1,5)^3 = -3,375$ . Les points  $(1,5; 3,375)$  et  $(-1,5; -3,375)$  sont donc symétriques par rapport à l'origine : c'est vrai pour toute la courbe.

## Exemple — Le volume d'un cube

Un cube de rangement a pour arête 2,5 dm. Son volume est  $2,5^3 = 2,5 \times 2,5 \times 2,5 = 15,625 \text{ dm}^3$ , soit environ 15,6 L. Le volume d'un cube d'arête  $a$  est l'image de  $a$  par la fonction cube.

## Erreur fréquente — Le cube n'est pas le triple

$x^3$  n'est pas  $3x$  :  $2^3 = 8$ , alors que  $3 \times 2 = 6$ . Et le signe se conserve :  $(-2)^3 = -8$ , pas 8.

**Application 1 – Cubes de nombres, cubes de rangement**

On note  $f(x) = x^3$ .

- Calculer  $f(3)$ ,  $f(-3)$ ,  $f(0,4)$  et  $f(-0,4)$ .
- Que remarque-t-on sur  $f(3)$  et  $f(-3)$  ? Qu'est-ce que cela signifie pour la courbe ?
- Un cube de rangement a pour arête 30 cm. Calculer son volume en litres. On double l'arête : par combien le volume est-il multiplié ?

**Correction — Application 1**

a.  $f(3) = 27$     $f(-3) = -27$     $f(0,4) = 0,064$     $f(-0,4) = -0,064$ .

b. Les images de deux nombres opposés sont opposées. Les points  $(3; 27)$  et  $(-3; -27)$  sont symétriques par rapport à l'origine.

c. 30 cm = 3 dm, donc  $V = 3^3 = 27 \text{ dm}^3 = 27 \text{ L}$ . Avec une arête de 6 dm :  $6^3 = 216 \text{ L}$ , et  $216 = 27 \times 8$ . Le volume est **multiplié par 8**, pas par 2.

*Conduite* : faire justifier le «  $\times 8$  » par  $2 \times 2 \times 2$  : chacune des trois dimensions double. C'est la raison pour laquelle le volume grandit si vite.

**2 Dérivée et variations de la fonction cube (C1)****Méthode — Conjecturer la dérivée au tableur**

Comme en Première pour la fonction carré, on calcule au tableur la pente de la sécante sur un très petit pas, avec la formule  $=((A2+0,001)^3-A2^3)/0,001$  :

| $x$       | -2     | -1    | 0     | 1     | 2      | 3      |
|-----------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| pente lue | 11,994 | 2,997 | 0,000 | 3,003 | 12,006 | 27,009 |
| $3x^2$    | 12     | 3     | 0     | 3     | 12     | 27     |

Les pentes sont très proches de  $3x^2$  : on **conjecture** que la dérivée de  $x^3$  est  $3x^2$ . Cette formule est ensuite **admise**.

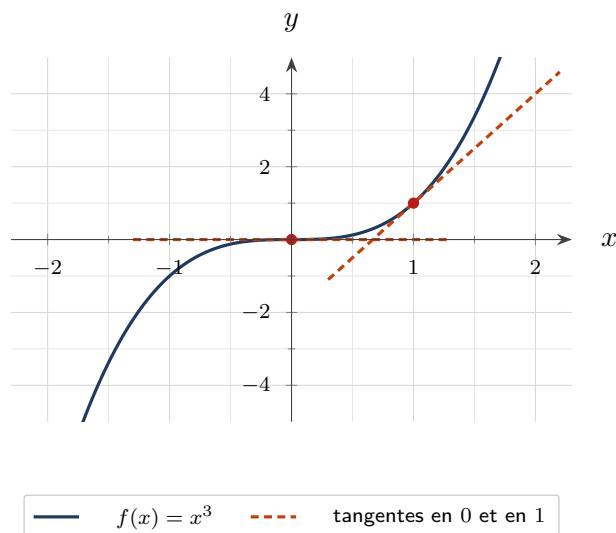
**Proposition — Dérivée de la fonction cube (admise)**

$$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

Un carré n'est jamais négatif, donc  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$  pour tout  $x$ , et  $f'(x) = 0$  seulement pour  $x = 0$ . La fonction cube est **croissante sur  $\mathbb{R}$** .

|         |    |   |   |
|---------|----|---|---|
| $x$     | -2 | 0 | 2 |
| $f'(x)$ | +  | 0 | + |
| $f(x)$  | -8 | 0 | 8 |

Tableau de variations de la fonction cube sur  $[-2; 2]$  : la dérivée s'annule en 0 sans changer de signe, la flèche monte d'un seul tenant de -8 à 8 en passant par 0.



Courbe de la fonction cube avec deux tangentes en tirets orange. En  $x = 0$  la tangente est horizontale (pente  $f'(0) = 0$ ) ; en  $x = 1$  elle passe par  $(1; 1)$  et  $(2; 4)$ .

### Erreur fréquente — Une dérivée nulle ne donne pas forcément un extremum

$f'(0) = 0$  : la tangente en 0 est horizontale. Pourtant  $f(-0,5) = -0,125$  est plus petit que  $f(0) = 0$ , lui-même plus petit que  $f(0,5) = 0,125$  : la fonction **continue de monter**. Ce n'est ni un maximum ni un minimum, parce que  $f'$  **ne change pas de signe** en 0 : elle est positive avant, positive après.

### Application 2 – Pentés de la fonction cube

- Calculer  $f'(-1)$ ,  $f'(0,5)$  et  $f'(2)$ .
- Sur la figure ci-dessus, lire deux points de la tangente en  $x = 1$  et vérifier que son coefficient directeur est bien  $f'(1)$ .
- Calculer  $f(-0,1)$ ,  $f(0)$  et  $f(0,1)$ . La fonction cube admet-elle un maximum ou un minimum en 0 ? Justifier.

#### Correction — Application 2

- $f'(-1) = 3 \times 1 = 3$      $f'(0,5) = 3 \times 0,25 = 0,75$      $f'(2) = 3 \times 4 = 12$ .
- La tangente passe par  $(1; 1)$  et  $(2; 4)$  : on avance de 1, on monte de 3, pente 3. Et  $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$ . ✓
- $f(-0,1) = -0,001$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(0,1) = 0,001$ . Les valeurs augmentent de part et d'autre de 0 : **aucun extremum** en 0, bien que  $f'(0) = 0$ .

*Conduite* : le programme demande de *constater* ce fait sur la fonction cube. Le faire dire avec les mots « la dérivée s'annule sans changer de signe ».

## 3 Dériver un polynôme de degré 3 (C2)

### Définition — Fonction polynôme de degré 3

Une **fonction polynôme de degré 3** s'écrit

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{avec } a \neq 0$$

Les nombres  $b$ ,  $c$  et  $d$  peuvent être nuls. Par exemple,  $-x^3 + 4x$  correspond à  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 4$  et  $d = 0$ .

**Proposition — Formules et règles à connaître (admisses)**

| Fonction | $k$ (constante) | $ax + b$ | $x^2$ | $x^3$  |
|----------|-----------------|----------|-------|--------|
| Dérivée  | 0               | $a$      | $2x$  | $3x^2$ |

Deux règles : la dérivée de  $k \times f$  est  $k \times f'$  ; la dérivée de  $f + g$  est  $f' + g'$ .

Conséquence :  $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$ . La dérivée d'un polynôme de degré 3 est un polynôme de degré 2.

**Exemple — Dériver  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$** 

On dérive terme à terme :  $2x^3$  donne  $2 \times 3x^2 = 6x^2$  ■  $-5x^2$  donne  $-5 \times 2x = -10x$  ■  $4x$  donne 4 ■  $-7$  donne 0.

D'où  $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$ . Par exemple  $f'(2) = 24 - 20 + 4 = 8$ .

**Exemple — Développer d'abord :  $g(x) = x^2(x - 3)$** 

$g(x) = x^3 - 3x^2$ , donc  $g'(x) = 3x^2 - 6x$ .

**Erreur fréquente — Un produit se développe avant d'être dérivé**

Dériver « facteur par facteur »  $x^2$  et  $(x - 3)$  donnerait  $2x \times 1 = 2x$  : c'est faux. Le programme ne donne pas de formule pour la dérivée d'un produit : on développe, puis on dérive terme à terme.

**Application 3 – Cinq dérivées, puis deux valeurs**

Dériver chacune des fonctions suivantes.

- a.  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 9$     b.  $g(x) = -2x^3 + 7x$     c.  $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$   
d.  $k(x) = 0,5x^3 - 6x + 1$     e.  $m(x) = x(x^2 + 5)$   
f. Calculer  $g'(1)$  et  $h'(2)$ .

**Correction — Application 3**

- a.  $f'(x) = 3x^2 + 8x - 2$     b.  $g'(x) = -6x^2 + 7$     c.  $h'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x = x^2 - 2x$   
d.  $k'(x) = 1,5x^2 - 6$     e.  $m(x) = x^3 + 5x$ , donc  $m'(x) = 3x^2 + 5$ .  
f.  $g'(1) = -6 + 7 = 1$      $h'(2) = 4 - 4 = 0$ .

*Erreurs attendues* : au c., oublier que  $\frac{1}{3} \times 3 = 1$  ; au e., dériver  $x(x^2 + 5)$  sans développer.

**4 Le signe de la dérivée (C3)**

La dérivée d'un polynôme de degré 3 est un polynôme de degré 2 : on réinvestit ce qui a été appris en Première sur son signe.

**Proposition — Signe d'un polynôme de degré 2 factorisé (rappel)**

Si  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 < x_2$  :  $P(x)$  a le **signe de  $a$  à l'extérieur des racines** et le signe contraire entre les racines.

Si  $P(x) = a(x - x_0)^2$  :  $P(x)$  a le signe de  $a$  partout, et s'annule seulement en  $x_0$ .

**Méthode — Trouver les racines de  $f'$  sans formule**

- 1. Forme factorisée donnée** par l'énoncé : la vérifier en développant.
- 2. Facteur commun**  $x$  :  $3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ , racines 0 et 4.
- 3. Une racine connue**  $x_1$ , donnée ou trouvée en testant des entiers : pour  $ax^2 + bx + c$ , la seconde racine est  $x_2 = \frac{c}{a \times x_1}$ , car le terme constant de  $a(x - x_1)(x - x_2)$  vaut  $a \times x_1 \times x_2$ .
- 4. Sinon, l'outil numérique** donne des valeurs approchées (§8).

**Exemple — Signe de  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$** 

**Racine connue par un test** :  $f'(-1) = 3 + 6 - 9 = 0$ , donc  $-1$  est racine.

**Seconde racine** :  $x_2 = \frac{-9}{3 \times (-1)} = 3$ . Contrôle :  $f'(3) = 27 - 18 - 9 = 0$ . ✓

**Forme factorisée** :  $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$ . Contrôle :  $3(x^2 - 3x + x - 3) = 3x^2 - 6x - 9$ . ✓

**Signe** :  $a = 3 > 0$ , donc  $f'$  est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

**Erreur fréquente — Entre les racines, le signe est celui de  $-a$** 

Il n'est pas « toujours négatif » entre les racines : pour  $-3(x - 1)(x - 4)$ , le coefficient  $a = -3$  est négatif, donc l'expression est **positive** entre 1 et 4. Contrôle avec une valeur : en  $x = 2$ ,  $-3 \times 1 \times (-2) = 6 > 0$ .

**Application 4 – Quatre signes de dérivées**

Pour chaque dérivée, trouver les racines puis dresser le tableau de signes sur  $\mathbb{R}$ .

- a.  $f'(x) = -3(x - 1)(x - 4)$       b.  $g'(x) = 6x^2 - 12x$   
 c.  $h'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ , sachant que 2 est une racine      d.  $k'(x) = 3x^2 + 12$

**Correction — Application 4**

- a. Racines 1 et 4,  $a = -3 < 0$  : - avant 1, + entre 1 et 4, - après 4.  
 b. Facteur commun :  $g'(x) = 6x(x - 2)$ , racines 0 et 2,  $a = 6 > 0$  : +, - entre 0 et 2, +.  
 c.  $h'(2) = 12 - 6 - 6 = 0$  ; seconde racine  $\frac{-6}{3 \times 2} = -1$ . Donc  $h'(x) = 3(x - 2)(x + 1)$  : + avant  $-1$ , - entre  $-1$  et 2, + après 2.  
 d.  $3x^2 \geq 0$ , donc  $k'(x) = 3x^2 + 12 \geq 12 > 0$  : **toujours positive**, pas de racine.

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ | $+\infty$ |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|
| $f'(x)$ | $-$       | $-$  | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $0$       | $-$ |
| $g'(x)$ | $+$       | $+$  | $0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$       | $+$ |
| $h'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$       | $+$ |
| $k'(x)$ | $+$       | $+$  | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$       | $+$ |

Les quatre lignes sont réunies dans un même tableau pour la correction ; l'élève peut en faire quatre séparés.

*Conduite* : au a., faire contrôler le signe avec une valeur, par exemple  $f'(2) = 6$ .

## 5 Dresser le tableau de variations (C3)

### Proposition — Signe de la dérivée et sens de variation (rappel de Première)

Sur un intervalle : si  $f'(x) > 0$ ,  $f$  est **croissante** ; si  $f'(x) < 0$ ,  $f$  est **décroissante**. Une dérivée qui s'annule en quelques points isolés sans changer de signe ne change pas le sens de variation.

### Méthode — Cinq étapes, toujours les mêmes

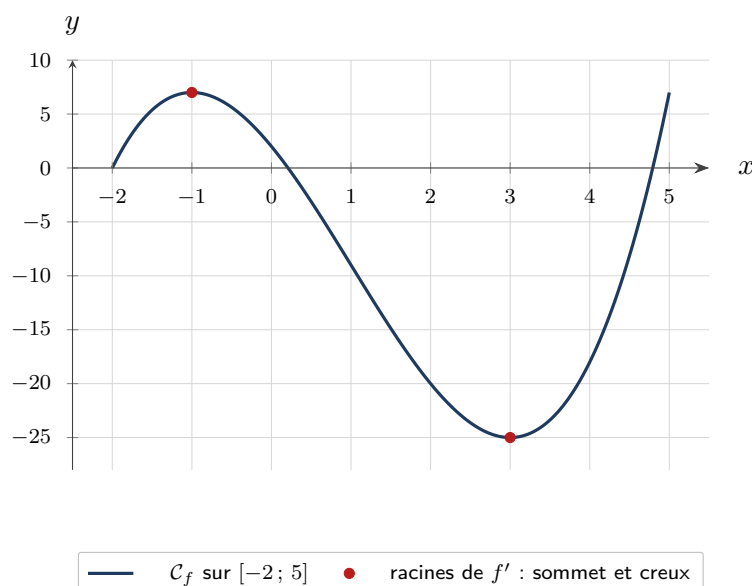
1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Trouver les racines de  $f'$  (§4).
3. Donner le signe de  $f'$  sur l'intervalle d'étude.
4. Traduire ce signe par des flèches.
5. Calculer  $f$  aux bornes de l'intervalle et aux racines de  $f'$ , et écrire ces valeurs au bout des flèches.

### Exemple — Tableau de variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur $[-2; 5]$

**1 à 3.**  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$  : positive, puis négative entre  $-1$  et  $3$ , puis positive (exemple du §4).

**5.**  $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0$      $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$      $f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$   
 $f(5) = 125 - 75 - 45 + 2 = 7$ .

|         |    |     |   |       |   |     |
|---------|----|-----|---|-------|---|-----|
| $x$     | -2 | -1  |   | 3     |   | 5   |
| $f'(x)$ |    | +   | 0 | -     | 0 | +   |
| $f(x)$  | 0  | ↗ 7 |   | ↘ -25 |   | ↗ 7 |



Courbe de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  sur  $[-2; 5]$  ; la grille est tracée de 1 en 1 horizontalement et de 5 en 5 verticalement. Les deux points rouges,  $(-1; 7)$  et  $(3; -25)$ , sont ceux où la tangente est horizontale.

### Erreur fréquente — Le tableau commence et finit aux bornes de l'intervalle

Sur  $[-2; 5]$ , la première colonne est  $-2$  et la dernière  $5$ , et l'on y écrit  $f(-2)$  et  $f(5)$ . Un tableau sans ces deux valeurs ne permet ni de trouver le maximum, ni de compter les solutions d'une équation.

**Application 5 – Un tableau complet**

On donne  $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$  sur  $[0; 4]$ , et l'on admet que  $g'(x) = -3(x-1)(x-3)$ .

- Calculer  $g'(x)$  à partir de  $g$ , puis vérifier la forme factorisée en la développant.
- Donner le signe de  $g'$  sur  $[0; 4]$ .
- Calculer  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(3)$  et  $g(4)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $[0; 4]$ .

**Correction — Application 5**

- $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$ .  $-3(x-1)(x-3) = -3(x^2 - 4x + 3) = -3x^2 + 12x - 9$ . ✓
- $a = -3 < 0$  :  $g'$  est négative sur  $[0; 1]$ , positive sur  $[1; 3]$ , négative sur  $[3; 4]$ .
- $g(0) = 5$   $g(1) = -1 + 6 - 9 + 5 = 1$   $g(3) = -27 + 54 - 27 + 5 = 5$   $g(4) = -64 + 96 - 36 + 5 = 1$ .
- 

|         |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$     | 0 | 1 | 3 | 4 |   |   |   |
| $g'(x)$ |   | − | 0 | + | 0 | − |   |
| $g(x)$  | 5 |   | 1 |   | 5 |   | 1 |

*Conduite* : le coefficient  $-3$  inverse l'ordre habituel des signes ; faire contrôler avec  $g'(2) = -3 \times 1 \times (-1) = 3 > 0$ .

**6 Les extremums locaux (C5)****Définition — Extremum local**

$f(x_0)$  est un **maximum local** de  $f$  si c'est la plus grande valeur prise par  $f$  pour les  $x$  proches de  $x_0$ . On définit de même un **minimum local**. Maximum et minimum sont des **extremums**.

**Proposition — Lire un extremum local sur le tableau**

Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  **en changeant de signe** :

$f'$  passe de  $+$  à  $-$  :  $f(x_0)$  est un **maximum local** ;

$f'$  passe de  $-$  à  $+$  :  $f(x_0)$  est un **minimum local**.

Si  $f'$  s'annule **sans changer de signe**, il n'y a pas d'extremum en  $x_0$ .

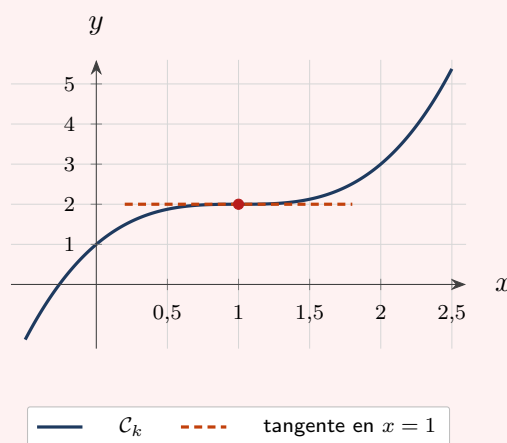
**Exemple — Extremums locaux de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  sur  $[-2; 5]$** 

D'après le tableau du §5 :  $f'$  passe de  $+$  à  $-$  en  $-1$ , donc **7 est un maximum local**, atteint en  $x = -1$  ;  $f'$  passe de  $-$  à  $+$  en  $3$ , donc  **$-25$  est un minimum local**, atteint en  $x = 3$ .

Un maximum local n'est pas forcément la plus grande valeur de  $f$  sur tout l'intervalle : sur  $[-2; 6]$ , on aurait  $f(6) = 56$ , bien plus grand que 7.

**Erreur fréquente —  $f'(x_0) = 0$  ne suffit pas**

Pour  $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ , on trouve  $k'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$ . Donc  $k'(1) = 0$ , mais  $k'(x) \geq 0$  partout :  $k$  est croissante et n'a **aucun extremum**. Sa courbe est celle de la fonction cube, décalée.



Courbe de  $k$  sur  $[-0,5; 2,5]$ . En  $(1; 2)$  la tangente est horizontale, mais la courbe monte avant et après ce point.

### Application 6 – Extremum ou pas ?

- a. À l'aide du tableau de l'application 5, donner les extremums locaux de  $g$  sur  $[0; 4]$ , leur nature et l'abscisse où ils sont atteints.
- b. On donne  $m(x) = x^3 + 3x - 1$ . Calculer  $m'(x)$  et justifier que  $m$  n'a aucun extremum local.
- c. On donne  $n(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$  et l'on admet que  $n'(x) = 3(x+2)^2$ . La fonction  $n$  a-t-elle un extremum local en  $-2$  ?

#### Correction — Application 6

- a. En  $x = 1$ ,  $g'$  passe de  $-$  à  $+$  : **minimum local** 1. En  $x = 3$ ,  $g'$  passe de  $+$  à  $-$  : **maximum local** 5.
- b.  $m'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$  :  $m'$  ne s'annule jamais,  $m$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , sans extremum local.
- c.  $n'(-2) = 0$ , mais  $3(x+2)^2 \geq 0$  partout :  $n'$  ne change pas de signe. **Pas d'extremum** en  $-2$  ;  $n$  est croissante.
- Conduite : au c., faire contrôler avec  $n(-2,1)$ ,  $n(-2)$  et  $n(-1,9)$  à la calculatrice :  $-8,001$ ,  $-8$ ,  $-7,999$ .

## 7 Le nombre de solutions de $f(x) = c$ (C4)

Graphiquement, les solutions de  $f(x) = c$  sont les abscisses des points où la courbe coupe la droite horizontale d'équation  $y = c$ . Le tableau de variations permet de les **compter** sans tracer la courbe.

### Méthode — Compter les solutions flèche par flèche

Le long d'une flèche, la fonction va d'une valeur à une autre sans revenir en arrière.

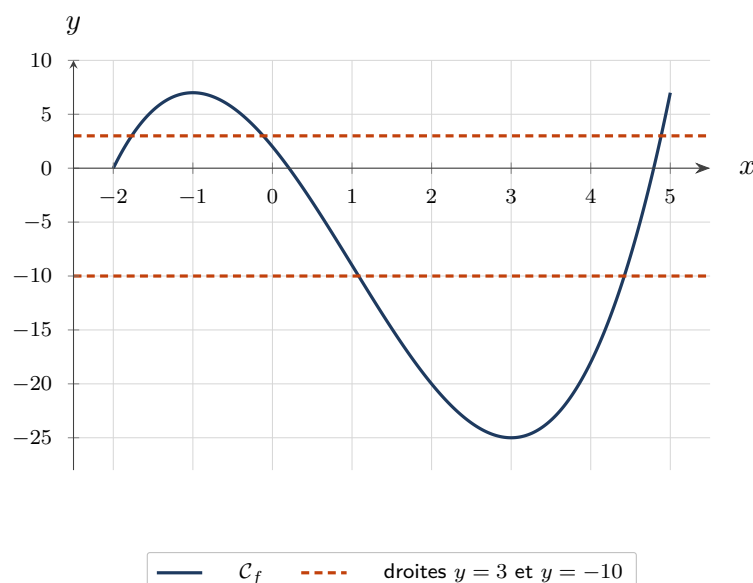
- Pour chaque flèche, regarder si  $c$  est compris entre les deux valeurs écrites à ses extrémités, bornes comprises : si oui, l'équation a **une** solution sur cette flèche ; sinon, aucune.
- Additionner les solutions des flèches, sans compter deux fois un  $x$  où deux flèches se rejoignent.

### Exemple — $f(x) = 3$ et $f(x) = -10$ , pour $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur $[-2; 5]$

Les trois flèches vont de 0 à 7, de 7 à  $-25$ , puis de  $-25$  à 7.

$f(x) = 3$  : 3 est entre 0 et 7, entre 7 et  $-25$ , entre  $-25$  et 7 : une solution sur chaque flèche, **3 solutions**.

$f(x) = -10$  :  $-10$  n'est pas entre 0 et 7 ; il est entre 7 et  $-25$ , et entre  $-25$  et 7 : **2 solutions**.



La même courbe que la figure du §5. La droite  $y = 3$  la coupe en trois points, la droite  $y = -10$  en deux points : ce sont les nombres de solutions trouvés par le tableau.

### Erreur fréquente — Un sommet ne se compte qu'une fois

$f(x) = 7$  : la valeur 7 termine la première flèche et commence la deuxième, au même point  $x = -1$ . C'est une seule solution. Avec  $x = 5$ , l'équation a **2 solutions**, pas 3.

### Remarque — Le tableau donne le nombre, pas les valeurs

Pour obtenir les solutions elles-mêmes, on utilise la calculatrice ou le balayage (§9). Pour  $f(x) = -10$  :  $x \approx 1,08$  et  $x \approx 4,42$ .

### Application 7 – Compter sans tracer

On reprend le tableau de variations de  $g$  obtenu à l'application 5, sur  $[0 ; 4]$ . Combien de solutions chaque équation possède-t-elle sur  $[0 ; 4]$  ? Justifier à l'aide des flèches.

- a.  $g(x) = 3$       b.  $g(x) = 5$       c.  $g(x) = 1$       d.  $g(x) = 6$

### Correction — Application 7

Les flèches vont de 5 à 1, de 1 à 5, puis de 5 à 1.

- a. 3 est entre 1 et 5 sur chacune des trois flèches : **3 solutions**.
- b. 5 est atteint en  $x = 0$  et en  $x = 3$  (où deux flèches se rejoignent) : **2 solutions**.
- c. 1 est atteint en  $x = 1$  et en  $x = 4$  : **2 solutions**.
- d. 6 est plus grand que toutes les valeurs du tableau : **aucune solution**.

*Erreur attendue* : au b., compter  $x = 3$  deux fois et répondre 3.

## 8 Les racines de la dérivée à l'outil numérique (C3)

Quand la dérivée n'est pas facilement factorisable, le programme prévoit de déterminer ses racines avec un outil numérique. On obtient des **valeurs approchées**, qui suffisent pour dresser le tableau.

### Méthode — Trois façons d'obtenir les racines de $f'$

1. **Calculatrice graphique** : tracer  $y = f'(x)$ , puis utiliser la fonction qui donne les points où la courbe coupe l'axe des abscisses (souvent nommée « zéro » ou « racine »).
2. **Tableau de valeurs de  $f'$**  : repérer où  $f'$  change de signe, puis recommencer avec un pas plus petit.

### 3. Logiciel de géométrie dynamique : saisir $f'$ , puis la commande qui donne ses racines.

**Exemple** —  $h(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 10$  sur  $[-1; 4]$

$h'(x) = 3x^2 - 6x - 3$ . Aucun entier n'annule  $h'$  :  $h'(-1) = 6$ ,  $h'(0) = -3$ ,  $h'(2) = -3$ ,  $h'(3) = 6$ . Le signe change entre  $-1$  et  $0$ , puis entre  $2$  et  $3$ .

À la calculatrice :  $x_1 \approx -0,41$  et  $x_2 \approx 2,41$ . Comme  $a = 3 > 0$ ,  $h'$  est positive, négative, puis positive.

$h(-1) = 9$     $h(-0,41) \approx 10,66$     $h(2,41) \approx -0,66$     $h(4) = 14$ .

|         |      |                          |                          |               |     |
|---------|------|--------------------------|--------------------------|---------------|-----|
| $x$     | $-1$ | $\approx -0,41$          | $\approx 2,41$           | $4$           |     |
| $h'(x)$ | $+$  | $0$                      | $-$                      | $0$           | $+$ |
| $h(x)$  | $9$  | $\nearrow \approx 10,66$ | $\searrow \approx -0,66$ | $\nearrow 14$ |     |

**Remarque** — Garder assez de décimales

Le minimum local vaut environ  $-0,66$  : il est **négatif**. Arrondi à l'unité, on écrirait  $-1$  ou même  $0$  et l'on pourrait se tromper en comptant les solutions de  $h(x) = 0$  : il y en a deux sur  $[-1; 4]$ , sur la deuxième et la troisième flèche.

### Application 8 – Une dérivée qui ne se factorise pas à vue

On donne  $m(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$  sur  $[0; 3]$ .

a. Calculer  $m'(x)$ .

b. À la calculatrice, déterminer les racines de  $m'$ , arrondies au centième.

c. Calculer  $m(0)$  et  $m(3)$ , puis des valeurs approchées de  $m$  aux racines de  $m'$ . Dresser le tableau de variations de  $m$  sur  $[0; 3]$ .

d. Combien de solutions l'équation  $m(x) = 0$  possède-t-elle sur  $[0; 3]$  ?

#### Correction — Application 8

a.  $m'(x) = 3x^2 - 8x + 2$ .

b.  $x_1 \approx 0,28$  et  $x_2 \approx 2,39$ .

c.  $m(0) = 3$ ,  $m(0,28) \approx 3,27$ ,  $m(2,39) \approx -1,42$ ,  $m(3) = 0$ .

|         |   |                                                                                                                                                                                                                                        |                |   |   |   |
|---------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---|---|---|
| $x$     | 0 | $\approx 0,28$                                                                                                                                                                                                                         | $\approx 2,39$ | 3 |   |   |
| $m'(x)$ |   | +                                                                                                                                                                                                                                      | 0              | - | 0 | + |
| $m(x)$  |   | <div><div><math>3</math></div><div><math>\nearrow</math></div><div><math>\approx 3,27</math></div><div><math>\searrow</math></div><div><math>\approx -1,42</math></div><div><math>\nearrow</math></div><div><math>0</math></div></div> |                |   |   |   |

d. Première flèche, de  $3$  à  $3,27$  :  $0$  n'y est pas. Deuxième, de  $3,27$  à  $-1,42$  : une solution. Troisième, de  $-1,42$  à  $0$  : une solution,  $x = 3$ . **2 solutions.**

*Conduite* : faire remarquer que la borne  $x = 3$  est elle-même solution.

## 9 Le balayage (activité numérique du programme)

### Définition — Balayer un intervalle

On sait que l'équation  $f(x) = g(x)$  a une solution dans l'intervalle  $[a; b]$ . On calcule  $f(x)$  et  $g(x)$  de proche en proche, avec un **pas** constant. Quand la comparaison s'inverse —  $f(x) < g(x)$ , puis  $f(x) > g(x)$  — la solution se trouve entre les deux dernières valeurs testées : on obtient un **encadrement**. On recommence avec un pas dix fois plus petit pour le resserrer.

### Exemple — Encadrer la solution de $x^3 = x + 1$ dans $[1; 2]$

**Il y a une seule solution.** Posons  $d(x) = x^3 - x - 1$  :  $d'(x) = 3x^2 - 1 \geq 2 > 0$  sur  $[1; 2]$ , et  $d$  croît de  $d(1) = -1$  à  $d(2) = 5$ . La flèche passe par 0 une fois : une seule solution.

| $x$            | 1,2     | 1,3     | 1,4     | 1,32    | 1,33    |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $f(x) = x^3$   | 1,728   | 2,197   | 2,744   | 2,300   | 2,353   |
| $g(x) = x + 1$ | 2,2     | 2,3     | 2,4     | 2,32    | 2,33    |
| comparaison    | $f < g$ | $f < g$ | $f > g$ | $f < g$ | $f > g$ |

Au pas de 0,1 :  $1,3 < x < 1,4$ . Au pas de 0,01 :  $1,32 < x < 1,33$ . Valeur approchée par défaut au centième :  $x \approx 1,32$ .

### Méthode — Le même balayage en Python

```

1 def f(x):
2     return x**3
3
4 def g(x):
5     return x + 1
6
7 x = 1
8 while f(x) < g(x): # tant que la courbe de f est sous celle de g
9     x = x + 0.01
10 print(round(x - 0.01, 2), "< x <", round(x, 2))

```

Le programme avance de 0,01 en 0,01 et s'arrête au premier  $x$  pour lequel  $f(x) \geq g(x)$ . Il affiche  $1.32 < x < 1.33$ .

### Erreur fréquente — Un encadrement n'est pas une valeur exacte

On écrit  $x \approx 1,32$ , jamais  $x = 1,32$  : d'ailleurs  $1,32^3 = 2,299\,968$ , qui n'est pas égal à 2,32.

**Application 9 – Encadrer au centième**

On considère l'équation  $x^3 = 2x + 3$  sur  $[1; 2]$ .

a. Poser  $d(x) = x^3 - 2x - 3$ . Calculer  $d(1)$ ,  $d(2)$  et  $d'(x)$ , puis justifier que l'équation a une seule solution dans  $[1; 2]$ .

b. Par balayage au pas de 0,1, puis de 0,01, encadrer cette solution.

**Correction — Application 9**

a.  $d(1) = 1 - 2 - 3 = -4$  et  $d(2) = 8 - 4 - 3 = 1$ .  $d'(x) = 3x^2 - 2$  ; sur  $[1; 2]$ ,  $x^2 \geq 1$  donc  $d'(x) \geq 1 > 0$  :  $d$  croît de  $-4$  à  $1$ , elle passe une seule fois par 0.

b.  $1,8^3 = 5,832 < 6,6$  et  $1,9^3 = 6,859 > 6,8$  :  $1,8 < x < 1,9$ .  $1,89^3 \approx 6,751 < 6,78$  et  $1,90^3 = 6,859 > 6,80$  :  **$1,89 < x < 1,90$** .

*Conduite* : on peut aussi balayer directement le signe de  $d(x)$  : c'est le même calcul, présenté autrement.

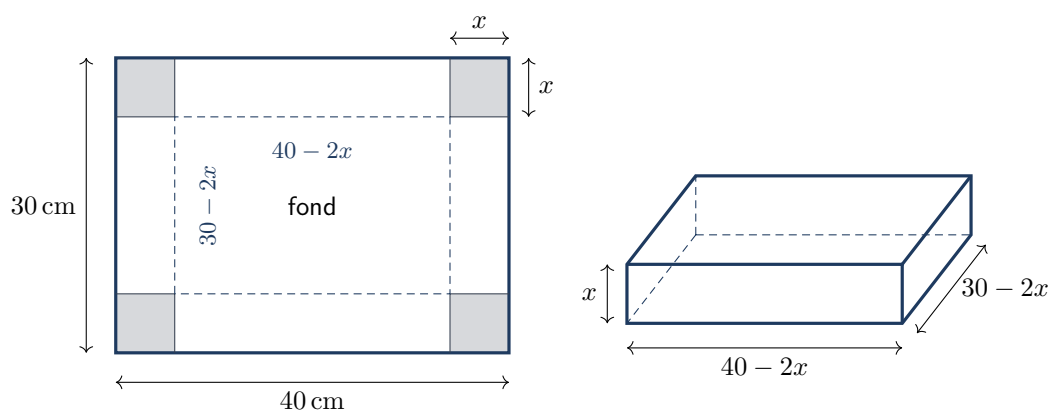
**10 La boîte de volume maximal (C2 à C5)**

Cette partie n'introduit pas de notion nouvelle : elle enchaîne les méthodes du chapitre pour répondre à une question pratique.

**Méthode — Résoudre un problème d'optimisation**

1. Choisir la variable et l'intervalle où elle a un sens. 2. Exprimer la grandeur à optimiser, puis la développer. 3. Dériver. 4. Trouver les racines de la dérivée dans l'intervalle. 5. Dresser le tableau de variations. 6. Répondre à la question, avec l'unité et les dimensions utiles.

On découpe un carré de côté  $x$ , en centimètres, à chaque coin d'une plaque de carton de 40 cm sur 30 cm, puis on relève les bords pour former une boîte ouverte. Quel côté  $x$  donne le plus grand volume ?



À gauche, la plaque vue de dessus, à plat : en gris, les quatre carrés de côté  $x$  retirés aux coins ; en pointillés, les lignes de pliage.  
À droite, la boîte obtenue, en perspective : longueur  $40 - 2x$ , largeur  $30 - 2x$ , hauteur  $x$ .

**Exemple — La boîte en carton de 40 cm sur 30 cm**

1. Il faut  $x > 0$  et  $2x < 30$  :  $x \in ]0; 15[$ .

2.  $V(x) = x(40 - 2x)(30 - 2x)$ . Or  $(40 - 2x)(30 - 2x) = 1\,200 - 80x - 60x + 4x^2 = 4x^2 - 140x + 1\,200$ , d'où

$$V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1\,200x$$

3.  $V'(x) = 12x^2 - 280x + 1\,200$ .

4. Aucune racine évidente : à la calculatrice,  $x_1 \approx 5,66$  et  $x_2 \approx 17,68$ . Seule  $x_1$  est dans  $]0; 15[$ .

5.  $a = 12 > 0$  :  $V'$  est positive avant 5,66 et négative entre 5,66 et 17,68.  $V(5,66) \approx 5,66 \times 28,68 \times$

$18,68 \approx 3\,032$ .

|         |     |                                                          |                                             |
|---------|-----|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $x$     | 0   | $\approx 5,66$                                           | 15                                          |
| $V'(x)$ |     | $\begin{matrix} + \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$           | $-$                                         |
| $V(x)$  | $0$ | $\begin{matrix} \nearrow \\ \approx 3\,032 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \searrow \\ 0 \end{matrix}$ |

6. Il faut découper des carrés d'environ 5,7 cm de côté. La boîte mesure environ 28,7 cm sur 18,7 cm sur 5,7 cm, pour un volume d'environ  $3\,032 \text{ cm}^3$ , soit à peu près 3 L.

### Remarque — Contrôler le résultat

$V(5) = 5 \times 30 \times 20 = 3\,000 \text{ cm}^3$  et  $V(6) = 6 \times 28 \times 18 = 3\,024 \text{ cm}^3$  : deux valeurs voisines, toutes deux inférieures à  $3\,032 \text{ cm}^3$ . ✓

### Application 10 – Le bac en tôle

Un bac ouvert est plié dans une tôle de 48 cm sur 30 cm : on retire un carré de côté  $x$ , en centimètres, à chaque coin, puis on relève les bords. Son volume, en  $\text{cm}^3$ , est  $V(x) = x(48 - 2x)(30 - 2x)$ .

- Justifier que  $x$  est compris entre 0 et 15.
- Développer  $V(x)$ . On admet que  $V'(x) = 12(x - 6)(x - 20)$  : le vérifier.
- Dresser le tableau de variations de  $V$  sur  $[0 ; 15]$ .
- Quelles sont les dimensions du bac de plus grand volume ? Quel est ce volume, en litres ?

### Correction — Application 10

- On retire  $2x$  sur la largeur de 30 cm : il faut  $x > 0$  et  $2x < 30$ , donc  $0 < x < 15$ .
- $(48 - 2x)(30 - 2x) = 1\,440 - 96x - 60x + 4x^2 = 4x^2 - 156x + 1\,440$ , donc  $V(x) = 4x^3 - 156x^2 + 1\,440x$  et  $V'(x) = 12x^2 - 312x + 1\,440$ .  $12(x - 6)(x - 20) = 12(x^2 - 26x + 120) = 12x^2 - 312x + 1\,440$ . ✓
- Racines 6 et 20 ; seule 6 est dans  $[0 ; 15]$ .  $V(6) = 6 \times 36 \times 18 = 3\,888$ .

|         |   |      |     |
|---------|---|------|-----|
| $x$     | 0 | 6    | 15  |
| $V'(x)$ |   | $+$  | $-$ |
| $V(x)$  | 0 | 3888 | 0   |

- Pour  $x = 6$  cm, le bac mesure 36 cm sur 18 cm sur 6 cm, pour  $3\,888 \text{ cm}^3$ , soit environ 3,9 L.  
*Conduite* : faire comparer avec la boîte de l'exemple, dont la dérivée ne se factorisait pas : ici, la forme factorisée est donnée, la méthode reste la même.

## Bilan – Je sais faire

## À retenir

**La fonction cube** :  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ , croissante sur  $\mathbb{R}$ . Sa dérivée s'annule en 0 sans changer de signe : pas d'extremum.

**Un polynôme de degré 3** :  $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$ .

**Le signe de  $f'$**  donne les variations ; un **changement de signe** de  $f'$  donne un extremum local ; le **tableau** permet de compter les solutions de  $f(x) = c$ , flèche par flèche.

Méthode — Choisir un chemin pour les racines de  $f'$ 

Forme factorisée donnée ? La vérifier en développant. Un  $x$  en facteur ? Le mettre en facteur. Une racine donnée ou trouvée en testant ? Seconde racine  $\frac{c}{a \times x_1}$ . Rien de tout cela ? Outil numérique, valeurs approchées.

Le **discriminant** n'est pas au programme, ni la dérivée d'un **produit** : on développe avant de dériver.

## Méthode — Vérifier sa réponse

1. Ai-je dérivé *chaque* terme, et développé les produits avant ? 2. Mes racines annulent-elles vraiment  $f'$  ? 3. Mon tableau porte-t-il les valeurs aux *bornes* et aux racines de  $f'$  ? 4. Ai-je compté une seule fois un sommet commun à deux flèches ? 5. Ai-je écrit  $\approx$  pour une valeur obtenue à la calculatrice ou par balayage ?