

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 4****Fonctions polynômes de degré 3**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les capacités du chapitre dans l'ordre du cours. Pour chaque exercice, écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec l'unité quand la grandeur en a une. La calculatrice graphique est nécessaire aux exercices 15, 19, 25 à 29. Dans tout le cahier, les racines de la dérivée s'obtiennent sans formule : forme factorisée donnée, facteur commun, racine connue ou calculatrice. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Étudier la fonction cube : dérivée, variations, représentation graphique	1 à 4	2
C2 – Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3	5 à 9	5
C3 – Dresser, à partir du signe de la dérivée, le tableau de variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3	10 à 16	7
C5 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer les éventuels extremums locaux de la fonction f	17 à 20	11
C4 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = c$, où c est un nombre réel	21 à 24	14
Activité numérique du programme – Déterminer un encadrement ou une valeur approchée par balayage d'une solution d'une équation du type $f(x) = g(x)$ lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné	25 à 27	17
C2 à C5 – Réinvestissement dans un problème d'optimisation	28 et 29	18

C1 – Étudier la fonction cube : dérivée, variations, représentation graphique

Exigible. Prérequis : calculer une puissance, placer un point dans un repère.

Rappel de cours

La fonction cube est $f(x) = x^3$. Le cube d'un nombre négatif est négatif : $(-2)^3 = -8$.

Sa dérivée est $f'(x) = 3x^2$: elle est positive, et nulle seulement en 0. La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

En 0, la tangente est horizontale mais il n'y a **pas d'extremum** : la dérivée s'annule sans changer de signe.

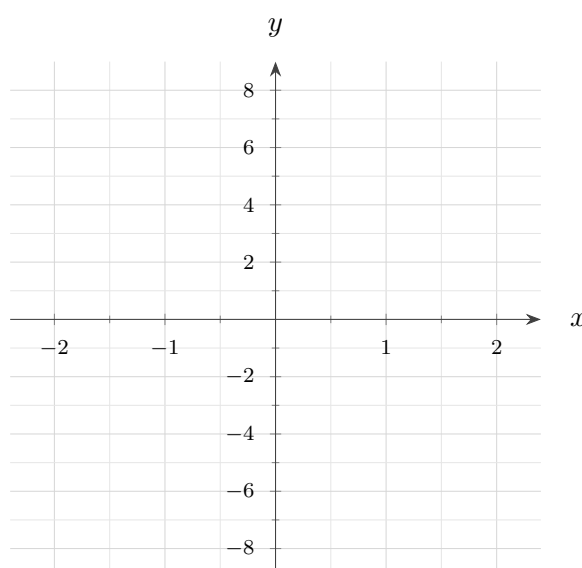
Exercice 1 — Tableau de valeurs et courbe de la fonction cube

On considère la fonction cube $f(x) = x^3$.

a. Compléter le tableau de valeurs.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

b. Placer les neuf points dans le repère ci-dessous, puis tracer la courbe à main levée.



Repère vierge : la grille est tracée tous les 0,5 horizontalement et tous les 1 verticalement.

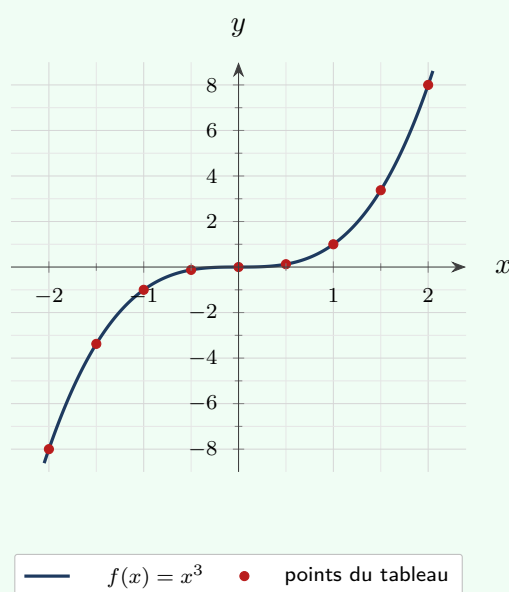
c. Comparer $f(1,5)$ et $f(-1,5)$. Que peut-on en déduire pour la courbe ?

Correction de l'exercice 1

a.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8

b.



c. $f(1,5) = 3,375$ et $f(-1,5) = -3,375$: deux nombres opposés ont des cubes opposés. Les points sont symétriques par rapport à l'origine, et c'est vrai pour toute la courbe.

Erreur attendue : $(-0,5)^3 = +0,125$. Faire écrire le produit des trois facteurs.

Exercice 2 — La puissance du vent

La puissance du vent qui traverse la surface balayée par les pales d'une éolienne est donnée, en watts, par

$$P = 0,6 \times S \times v^3$$

où S est l'aire balayée par les pales, en m^2 , et v la vitesse du vent, en m/s . Pour une petite éolienne, $S = 7 \text{ m}^2$.

- Montrer que, pour cette éolienne, $P(v) = 4,2 v^3$.
- Calculer la puissance du vent pour $v = 5 \text{ m/s}$, puis pour $v = 10 \text{ m/s}$.
- Quand la vitesse du vent double, par combien la puissance est-elle multipliée ? Justifier à l'aide de la fonction cube.
- Calculer $P'(v)$ et en déduire le sens de variation de P sur $[0 ; 12]$.

Correction de l'exercice 2

- $0,6 \times 7 = 4,2$, donc $P(v) = 4,2 v^3$.
- $P(5) = 4,2 \times 125 = 525 \text{ W}$ $P(10) = 4,2 \times 1000 = 4200 \text{ W}$.
- $(2v)^3 = 2^3 \times v^3 = 8v^3$: la puissance est **multipliée par 8**. Contrôle : $4200 \div 525 = 8$. ✓
- $P'(v) = 4,2 \times 3v^2 = 12,6 v^2 \geq 0$, nul seulement en 0 : P est **croissante** sur $[0 ; 12]$.
Pour aller plus loin, à l'oral : l'éolienne ne récupère qu'une partie de cette puissance (au plus les $16/27$ en théorie). Le facteur 8 explique pourquoi on installe les éoliennes là où le vent est le plus fort.

Exercice 3 — Dérivée et variations de la fonction cube

La dérivée de la fonction cube $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

- Calculer $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
- Quel est le signe de $f'(x)$? Pour quelle valeur de x s'annule-t-elle ?
- Dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 2]$, en y portant $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.
- Sans calculer, comparer $f(-1,7)$ et $f(1,2)$. Justifier.

Correction de l'exercice 3

- $f'(-2) = 12$ $f'(-1) = 3$ $f'(0) = 0$ $f'(1) = 3$ $f'(2) = 12$.
- Un carré n'est jamais négatif : $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, et $f'(x) = 0$ seulement pour $x = 0$.
-

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	-8	0	8

- f est croissante sur $[-2; 2]$ et $-1,7 < 1,2$, donc $f(-1,7) < f(1,2)$. Contrôle : $-4,913 < 1,728$. ✓

Exercice 4 — Une dérivée nulle, et pourtant

Un élève écrit : « Pour la fonction cube, $f'(0) = 0$. Donc la fonction cube admet un minimum en 0. »

- Calculer $f(-0,5)$, $f(0)$ et $f(0,5)$.
- Donner le signe de $f'(x) = 3x^2$ juste avant 0 et juste après 0.
- Expliquer l'erreur de l'élève.
- Citer une fonction étudiée en Première dont la dérivée s'annule en 0 *en changeant de signe*, et qui a bien un minimum en 0.

Correction de l'exercice 4

- $f(-0,5) = -0,125$ $f(0) = 0$ $f(0,5) = 0,125$.
- f' est positive avant 0 et positive après 0 : elle s'annule **sans changer de signe**.
- Les valeurs montent de $-0,125$ à 0 puis à $0,125$: $f(0)$ n'est ni la plus petite ni la plus grande des valeurs proches. Une dérivée nulle ne suffit pas ; il faut un changement de signe de f' .
- La fonction carré x^2 : sa dérivée $2x$ est négative avant 0 et positive après ; 0 est bien son minimum.

C2 – Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Exigible. Prérequis : dérivées de Première (constantes, fonctions affines, carré).

Rappel de cours

$f(x)$	k	$ax + b$	x^2	x^3
$f'(x)$	0	a	$2x$	$3x^2$

Règles : $(kf)' = k f'$ et $(f + g)' = f' + g'$. Donc $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Un produit se **développe** avant d'être dérivé.

Exercice 5 — Six dérivées immédiates

Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = 4x^3$ b. $g(x) = x^3 - 7$ c. $h(x) = -x^3 + 2x$
 d. $k(x) = 5x^2 - 3x + 1$ e. $m(x) = -2x^3 + 6x^2$ f. $p(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2x - 4$

Correction de l'exercice 5

- a. $f'(x) = 12x^2$ b. $g'(x) = 3x^2$ c. $h'(x) = -3x^2 + 2$
 d. $k'(x) = 10x - 3$ e. $m'(x) = -6x^2 + 12x$ f. $p'(x) = 1,5x^2 - 3x + 2$

Erreurs attendues : garder la constante (b. $3x^2 - 7$) ; oublier le coefficient (a. $3x^2$) ; au f., $0,5 \times 3 = 1,5$ et $-1,5 \times 2 = -3$.

Exercice 6 — Coefficients, puis dérivée

Pour chaque fonction, écrite sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, relever les coefficients, puis calculer la dérivée.

Fonction	a	b	c	d	Dérivée
$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$					
$g(x) = -2x^3 + 4x - 3$					
$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$					

Calculer ensuite $h'(1)$ et $h'(3)$. Que peut-on dire des tangentes à la courbe de h aux points d'abscisses 1 et 3 ?

Correction de l'exercice 6

Fonction	a	b	c	d	Dérivée
f	3	-2	5	-1	$f'(x) = 9x^2 - 4x + 5$
g	-2	0	4	-3	$g'(x) = -6x^2 + 4$
h	$\frac{1}{3}$	-2	3	0	$h'(x) = x^2 - 4x + 3$

Pour g , il n'y a pas de terme en x^2 : $b = 0$.

$h'(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ et $h'(3) = 9 - 12 + 3 = 0$: les tangentes en ces deux points sont **horizontales**.

Exercice 7 — Développer avant de dériver

Développer chaque expression, puis la dériver.

- a. $f(x) = x(x^2 - 5)$ b. $g(x) = (x + 2)(x^2 - 1)$ c. $h(x) = x^2(6 - x)$

Correction de l'exercice 7

- a. $f(x) = x^3 - 5x$, donc $f'(x) = 3x^2 - 5$.
 b. $g(x) = x^3 - x + 2x^2 - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$, donc $g'(x) = 3x^2 + 4x - 1$.
 c. $h(x) = 6x^2 - x^3$, donc $h'(x) = 12x - 3x^2$.

Erreur attendue : dériver facteur par facteur, par exemple au b. $1 \times 2x = 2x$. La dérivée d'un produit n'est pas au programme : on développe d'abord.

Exercice 8 — *Le volume d'un ballon qui se gonfle*

On gonfle un ballon sphérique. Quand son rayon vaut r centimètres, son volume, en cm^3 , est $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

- Calculer le volume du ballon pour un rayon de 10 cm. Arrondir au cm^3 , puis convertir en litres.
- Calculer $V'(r)$.
- Calculer $V'(10)$, arrondi à l'unité. Quand le rayon passe de 10 cm à 10,1 cm, de combien le volume augmente-t-il environ ?
- L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$. Que remarque-t-on ?

Correction de l'exercice 8

- $V(10) = \frac{4}{3}\pi \times 1\,000 \approx 4\,189 \text{ cm}^3$, soit environ 4,2 L.
- $V'(r) = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 = 4\pi r^2$.
- $V'(10) = 400\pi \approx 1\,257$. Pour une hausse de 0,1 cm du rayon, le volume augmente d'environ $1\,257 \times 0,1 \approx 126 \text{ cm}^3$. Contrôle : $V(10,1) - V(10) \approx 4\,316 - 4\,189 = 127$. ✓
- $V'(r) = 4\pi r^2$: la dérivée du volume est l'aire de la surface du ballon.
Conduite : $\frac{4}{3}\pi$ est un nombre ; la règle $(kf)' = k f'$ s'applique.

Exercice 9 — *Deux contrôles*

- Un élève dérive $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7$ et obtient $g'(x) = 6x^2 - 4x + 7$. Trouver ses deux erreurs et écrire la bonne dérivée.
- On donne $f(x) = ax^3 - 6x^2 + 1$, où a est un nombre inconnu. On sait que $f'(2) = 12$. Calculer $f'(x)$ en fonction de a , puis trouver a .

Correction de l'exercice 9

- Première erreur : $-4x^2$ se dérive en $-8x$, pas en $-4x$. Seconde erreur : le terme constant 7 disparaît.
 $g'(x) = 6x^2 - 8x$.
- $f'(x) = 3ax^2 - 12x$. Alors $f'(2) = 12a - 24$, et $12a - 24 = 12$ donne $12a = 36$, soit $a = 3$. Contrôle : $f'(x) = 9x^2 - 12x$ et $f'(2) = 36 - 24 = 12$. ✓

C3 – Dresser, à partir du signe de la dérivée, le tableau de variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Exigible. Prérequis : signe d'un polynôme de degré 2 factorisé (Première).

Rappel de cours

Racines de f' : forme factorisée donnée (la vérifier en développant) ; facteur commun x ; une racine connue x_1 , la seconde valant $\frac{c}{a \times x_1}$; sinon la calculatrice.

Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$: celui de a à l'extérieur des racines, le contraire entre elles.

Tableau : $f' > 0$, flèche qui monte ; $f' < 0$, flèche qui descend. Écrire les valeurs de f aux bornes et aux racines de f' .

Exercice 10 — Un tableau de variations pas à pas

On étudie $f(x) = x^3 - 12x + 1$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

- Calculer $f'(x)$.
- Vérifier que 2 et -2 annulent f' .
- Vérifier en développant que $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$.
- Calculer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$ et $f(3)$.
- Compléter le tableau : ligne du signe de $f'(x)$, puis flèches et valeurs.

x	-3	-2	2	3
$f'(x)$				
$f(x)$				

Correction de l'exercice 10

- $f'(x) = 3x^2 - 12$.
- $f'(2) = 12 - 12 = 0$ et $f'(-2) = 12 - 12 = 0$.
- $3(x - 2)(x + 2) = 3(x^2 + 2x - 2x - 4) = 3(x^2 - 4) = 3x^2 - 12$. ✓
- $f(-3) = -27 + 36 + 1 = 10$ $f(-2) = -8 + 24 + 1 = 17$ $f(2) = 8 - 24 + 1 = -15$
 $f(3) = 27 - 36 + 1 = -8$.
- $a = 3 > 0$: f' est positive à l'extérieur des racines, négative entre elles.

x	-3	-2	2	3		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

10

17

-15

-8

Exercice 11 — Une forme factorisée fournie

On étudie $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$ sur l'intervalle $[-2; 3]$. On admet que $g'(x) = -6(x+1)(x-2)$.

- Calculer $g'(x)$ à partir de g , puis vérifier la forme factorisée en la développant.
- Donner le signe de g' sur $[-2; 3]$. Attention au signe du coefficient -6 .
- Calculer $g(-2)$, $g(-1)$, $g(2)$ et $g(3)$.
- Dresser le tableau de variations de g sur $[-2; 3]$.

Correction de l'exercice 11

a. $g'(x) = -6x^2 + 6x + 12$. $-6(x+1)(x-2) = -6(x^2 - 2x + x - 2) = -6(x^2 - x - 2) = -6x^2 + 6x + 12$.
✓

b. $a = -6 < 0$: g' est négative à l'extérieur des racines, positive entre -1 et 2 . Contrôle : $g'(0) = 12 > 0$.

c. $g(-2) = 16 + 12 - 24 - 5 = -1$ $g(-1) = 2 + 3 - 12 - 5 = -12$ $g(2) = -16 + 12 + 24 - 5 = 15$
 $g(3) = -54 + 27 + 36 - 5 = 4$.

d.

x	-2	-1	2	3	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	-1		15		4

Exercice 12 — Un facteur commun

On étudie $h(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ sur l'intervalle $[-1; 5]$.

- Calculer $h'(x)$, puis le factoriser en mettant $3x$ en facteur.
- En déduire les racines de h' et son signe sur $[-1; 5]$.
- Calculer les valeurs utiles, puis dresser le tableau de variations de h .

Correction de l'exercice 12

a. $h'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$.

b. Racines 0 et 4 ; $a = 3 > 0$: h' positive sur $[-1; 0]$, négative sur $[0; 4]$, positive sur $[4; 5]$.

c. $h(-1) = -1 - 6 + 2 = -5$ $h(0) = 2$ $h(4) = 64 - 96 + 2 = -30$ $h(5) = 125 - 150 + 2 = -23$.

x	-1	0	4	5	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-5	2	-30	-23	

Exercice 13 — Une racine connue

On étudie $k(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x$ sur l'intervalle $[-3; 2]$.

- Calculer $k'(x)$ et vérifier que 1 est une racine de k' .
- En déduire la seconde racine de k' , puis la forme factorisée de $k'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de k sur $[-3; 2]$, avec les valeurs utiles.

Correction de l'exercice 13

a. $k'(x) = 3x^2 + 3x - 6$ et $k'(1) = 3 + 3 - 6 = 0$.

b. Seconde racine : $x_2 = \frac{c}{a \times x_1} = \frac{-6}{3 \times 1} = -2$. Contrôle : $k'(-2) = 12 - 6 - 6 = 0$. ✓ Donc $k'(x) = 3(x - 1)(x + 2)$.

c. $k(-3) = -27 + 13,5 + 18 = 4,5$ $k(-2) = -8 + 6 + 12 = 10$ $k(1) = 1 + 1,5 - 6 = -3,5$
 $k(2) = 8 + 6 - 12 = 2$.

x	-3	-2	1	2	
$k'(x)$	+	0	-	0	+
$k(x)$	4,5	10	-3,5	2	

Exercice 14 — Quand la dérivée ne change pas de signe

a. On donne $m(x) = x^3 + 3x$ sur $[-2; 2]$. Calculer $m'(x)$, justifier que $m'(x)$ est toujours positive, puis dresser le tableau de variations de m .

b. On donne $n(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ sur $[0; 3]$, et l'on admet que $n'(x) = -3(x - 1)^2$. Donner le signe de n' , puis dresser le tableau de variations de n en y portant $n(0)$, $n(1)$ et $n(3)$.

Correction de l'exercice 14

a. $m'(x) = 3x^2 + 3$. Comme $3x^2 \geq 0$, $m'(x) \geq 3 > 0$: m est croissante. $m(-2) = -8 - 6 = -14$ et $m(2) = 14$.

x	-2	2
$m'(x)$	+	
$m(x)$	-14	14

b. $(x - 1)^2 \geq 0$, donc $n'(x) = -3(x - 1)^2 \leq 0$; elle s'annule en 1 sans changer de signe. $n(0) = 2$, $n(1) = -1 + 3 - 3 + 2 = 1$, $n(3) = -27 + 27 - 9 + 2 = -7$.

x	0	1	3
$n'(x)$	-	0	-
$n(x)$	2	1	-7

Aucune de ces deux fonctions n'a d'extremum local.

Exercice 15 — Des racines à la calculatrice

On étudie $p(x) = x^3 - 4,5x^2 + 3x + 4$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

- Calculer $p'(x)$, puis $p'(0)$, $p'(1)$, $p'(2)$ et $p'(3)$. Entre quels entiers p' change-t-elle de signe ?
- À la calculatrice, déterminer les racines de p' , arrondies au centième.
- Calculer $p(0)$ et $p(4)$, puis des valeurs approchées au centième de p aux racines de p' .
- Dresser le tableau de variations de p sur $[0; 4]$.

Correction de l'exercice 15

- $p'(x) = 3x^2 - 9x + 3$. $p'(0) = 3$, $p'(1) = -3$, $p'(2) = -3$, $p'(3) = 3$: le signe change entre 0 et 1, puis entre 2 et 3. Aucun entier n'est racine.
- $x_1 \approx 0,38$ et $x_2 \approx 2,62$.
- $p(0) = 4$ $p(0,38) \approx 4,55$ $p(2,62) \approx -1,05$ $p(4) = 64 - 72 + 12 + 4 = 8$.
-

x	0	$\approx 0,38$	$\approx 2,62$	4	
$p'(x)$	+	0	-	0	+
$p(x)$	4	$\nearrow \approx 4,55$	$\searrow \approx -1,05$	$\nearrow 8$	

Conduite : faire écrire $\approx$ partout où la valeur vient de la calculatrice.

Exercice 16 — Le chariot d'une machine de découpe

Le chariot porte-outil d'une machine de découpe se déplace le long d'un rail. Sa position, en centimètres, mesurée depuis son point de départ, est donnée par

$$p(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \quad \text{pour } t \in [0; 5]$$

où t est le temps, en secondes. La dérivée $p'(t)$ est la vitesse du chariot, en cm/s.

- Calculer $p'(t)$, puis la vitesse du chariot au départ.
- On admet que $p'(t) = 3(t - 2)(t - 4)$. Le vérifier.
- Dresser le tableau de variations de p sur $[0; 5]$.
- À quels instants le chariot change-t-il de sens ? Quelle distance totale parcourt-il en 5 s ?

Correction de l'exercice 16

a. $p'(t) = 3t^2 - 18t + 24$; au départ, $p'(0) = 24$ cm/s.

b. $3(t-2)(t-4) = 3(t^2 - 6t + 8) = 3t^2 - 18t + 24$. ✓

c. $p(0) = 0$ $p(2) = 8 - 36 + 48 = 20$ $p(4) = 64 - 144 + 96 = 16$ $p(5) = 125 - 225 + 120 = 20$.

t	0	2	4	5		
$p'(t)$		+	0	-	0	+
$p(t)$						

0

↗

20

↘

16

↗

20

d. Le chariot avance jusqu'à 20 cm à $t = 2$ s, recule jusqu'à 16 cm à $t = 4$ s, puis repart en avant. Il change de sens à $t = 2$ s et à $t = 4$ s, là où sa vitesse s'annule en changeant de signe. Distance totale : $20 + 4 + 4 = 28$ cm.

Erreur attendue : répondre 20 cm, la position finale, au lieu de la distance parcourue.

C5 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer les éventuels extremums locaux de la fonction f

Exigible. Prérequis : C3.

Rappel de cours

Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe** : de + à -, $f(x_0)$ est un **maximum local** ; de - à +, un **minimum local**.

Si f' s'annule sans changer de signe : **pas d'extremum**.

La plus grande ou la plus petite valeur sur l'intervalle peut se trouver à une **borne** : toujours comparer avec les valeurs aux bornes.

Exercice 17 — Lire les extremums sur un tableau

Le tableau de variations d'une fonction f sur $[-4; 3]$ est donné ci-dessous.

x	-4	-2	1	3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	6	-3	5	

a. Sur quels intervalles f est-elle croissante ? décroissante ?

b. Donner les extremums locaux de f : valeur, abscisse et nature.

c. Quelle est la plus grande valeur de f sur $[-4; 3]$? la plus petite ?

d. Donner le signe de $f'(-3)$, de $f'(0)$ et de $f'(2)$.

Correction de l'exercice 17

- a. Croissante sur $[-4; -2]$ et sur $[1; 3]$; décroissante sur $[-2; 1]$.
 b. En $x = -2$, f' passe de $+$ à $-$: **maximum local** 6. En $x = 1$, f' passe de $-$ à $+$: **minimum local** -3 .
 c. Plus grande valeur : 6, en $x = -2$ (la borne droite ne donne que 5). Plus petite : -3 , en $x = 1$ (la borne gauche donne 2).
 d. $f'(-3) > 0$ $f'(0) < 0$ $f'(2) > 0$: on lit le sens des flèches.

Exercice 18 — Extremum local ou valeur extrême de l'intervalle

On étudie $q(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ sur l'intervalle $[0; 3]$. On admet que $q'(x) = 6(x-1)(x-2)$.

- a. Donner le signe de q' sur $[0; 3]$.
 b. Calculer $q(0)$, $q(1)$, $q(2)$ et $q(3)$, puis dresser le tableau de variations.
 c. Donner les extremums locaux de q et leur nature.
 d. Quelles sont la plus grande et la plus petite valeur de q sur $[0; 3]$? Coïncident-elles avec les extremums locaux ?

Correction de l'exercice 18

- a. $a = 6 > 0$: q' positive sur $[0; 1]$, négative sur $[1; 2]$, positive sur $[2; 3]$.
 b. $q(0) = -3$ $q(1) = 2 - 9 + 12 - 3 = 2$ $q(2) = 16 - 36 + 24 - 3 = 1$ $q(3) = 54 - 81 + 36 - 3 = 6$.

x	0	1	2	3	
$q'(x)$	+	0	-	0	+
$q(x)$	-3	2	1	6	

- c. Maximum local 2 en $x = 1$; minimum local 1 en $x = 2$.
 d. Plus grande valeur 6, en $x = 3$; plus petite -3 , en $x = 0$. Elles sont atteintes **aux bornes**, pas aux extremums locaux : il faut toujours calculer les valeurs aux bornes.

Exercice 19 — Le profil d'un sentier de randonnée

Le profil d'un sentier de randonnée de 5 km est modélisé par

$$A(x) = 12x^3 - 90x^2 + 180x + 600 \quad \text{pour } x \in [0; 5]$$

où x est la distance parcourue depuis le départ, en kilomètres, et $A(x)$ l'altitude, en mètres.

- a. Calculer l'altitude du départ et celle de l'arrivée.
 b. Calculer $A'(x)$. Vérifier qu'aucun entier de 0 à 5 n'annule A' .
 c. À la calculatrice, déterminer les racines de A' , arrondies au centième.
 d. Dresser le tableau de variations de A sur $[0; 5]$; arrondir les altitudes au mètre.
 e. Interpréter les extremums locaux pour le randonneur. Quel est le point le plus haut du parcours ?

Correction de l'exercice 19

- a. $A(0) = 600$ m $A(5) = 1\,500 - 2\,250 + 900 + 600 = 750$ m.
b. $A'(x) = 36x^2 - 180x + 180$. $A'(0) = 180$, $A'(1) = 36$, $A'(2) = -36$, $A'(3) = -36$, $A'(4) = 36$, $A'(5) = 180$: aucun n'est nul.
c. $x_1 \approx 1,38$ et $x_2 \approx 3,62$.
d. $A(1,38) \approx 709$ et $A(3,62) \approx 641$.

x	0	$\approx 1,38$	$\approx 3,62$	5
$A'(x)$		+	-	+
$A(x)$	600	$\nearrow \approx 709$	$\searrow \approx 641$	$\nearrow 750$

- e. Après environ 1,4 km, le randonneur passe un sommet à environ 709 m (maximum local) ; il redescend jusqu'à un creux à environ 641 m vers 3,6 km (minimum local), puis remonte. Le point le plus haut est l'arrivée, 750 m, à une borne.

Exercice 20 — Un élève conclut trop vite

Pour $r(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, un élève résout $r'(x) = 0$, trouve $x = 2$ et conclut : « r admet un extremum en 2. »

- a. Calculer $r'(x)$ et vérifier que $r'(x) = 3(x - 2)^2$.
b. Donner le signe de $r'(x)$ avant et après 2.
c. L'élève a-t-il raison ? Contrôler avec $r(1,9)$, $r(2)$ et $r(2,1)$.

Correction de l'exercice 20

- a. $r'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ et $3(x - 2)^2 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3x^2 - 12x + 12$. ✓
b. Un carré est positif : $r'(x) \geq 0$ avant et après 2.
c. Non : r' s'annule en 2 **sans changer de signe**, r est croissante, sans extremum. $r(1,9) = 7,999$, $r(2) = 8$, $r(2,1) = 8,001$: les valeurs montent.

C4 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = c$, où c est un nombre réel

Exigible. Prérequis : C3.

Rappel de cours

Sur chaque flèche, l'équation $f(x) = c$ a **une** solution si c est compris entre les deux valeurs écrites aux extrémités de la flèche, bornes comprises ; sinon aucune.

On additionne flèche par flèche, sans compter deux fois un sommet commun à deux flèches.

Graphiquement : points d'intersection de la courbe avec la droite $y = c$.

Exercice 21 — Compter sur un tableau donné

On reprend le tableau de variations de l'exercice 17.

x	-4	-2	1	3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2 6 -3 5 $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$				

Combien de solutions chaque équation possède-t-elle sur $[-4; 3]$? Justifier flèche par flèche.

- a.** $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = 4$ **c.** $f(x) = 6$ **d.** $f(x) = 7$ **e.** $f(x) = -3$ **f.** $f(x) = 5$

Correction de l'exercice 21

Les flèches vont de 2 à 6, de 6 à -3, puis de -3 à 5.

- a.** 0 : pas sur la première ; sur la deuxième et la troisième : **2 solutions.**
b. 4 : sur les trois flèches : **3 solutions.**
c. 6 : atteint seulement en $x = -2$, sommet commun aux deux premières flèches : **1 solution.**
d. 7 : plus grand que toutes les valeurs : **aucune solution.**
e. -3 : atteint seulement en $x = 1$: **1 solution.**
f. 5 : sur la première, sur la deuxième, et en $x = 3$ au bout de la troisième : **3 solutions.**

Exercice 22 — Compter à partir d'une étude

On reprend $f(x) = x^3 - 12x + 1$ étudiée sur $[-3; 3]$ à l'exercice 10. En utilisant son tableau de variations, donner le nombre de solutions de chaque équation sur $[-3; 3]$, en justifiant.

- a.** $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = -10$ **c.** $f(x) = 12$ **d.** $f(x) = 20$

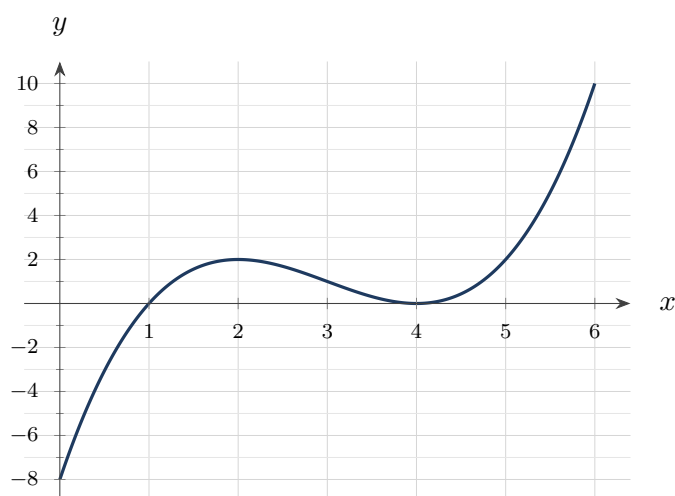
Correction de l'exercice 22

Les flèches vont de 10 à 17, de 17 à -15, puis de -15 à -8.

- a.** 0 n'est ni entre 10 et 17, ni entre -15 et -8 ; il est entre 17 et -15 : **1 solution.**
b. -10 : sur la deuxième et la troisième flèche : **2 solutions.**
c. 12 : sur la première et la deuxième : **2 solutions.**
d. 20 dépasse le maximum 17 : **aucune solution.**

Exercice 23 — Lire sur la courbe, justifier par le tableau

La courbe de $g(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 12x - 8$ est tracée ci-dessous sur $[0 ; 6]$.



— C_g

Repère : x en abscisse, $y = g(x)$ en ordonnée ; grille de 1 en 1.

- Lire sur la courbe les extremums locaux de g et les abscisses où ils sont atteints.
- On admet que $g'(x) = 1,5(x - 2)(x - 4)$. Calculer $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$, puis dresser le tableau de variations de g .
- Tracer les droites $y = 1$ et $y = 5$ sur la figure. Combien de solutions ont les équations $g(x) = 1$ et $g(x) = 5$? Le justifier aussi par le tableau.
- Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle ? Les lire.

Correction de l'exercice 23

a. Maximum local 2 en $x = 2$; minimum local 0 en $x = 4$.

b. $g(0) = -8$ $g(2) = 4 - 18 + 24 - 8 = 2$ $g(4) = 32 - 72 + 48 - 8 = 0$ $g(6) = 108 - 162 + 72 - 8 = 10$.

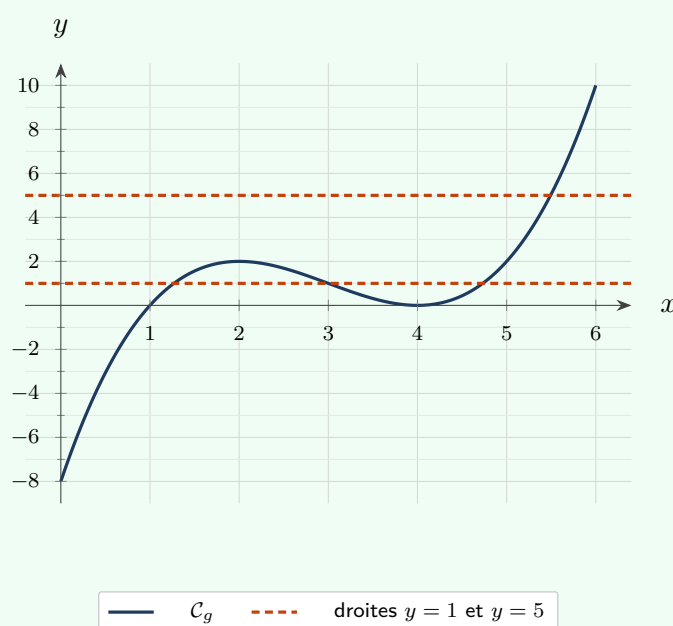
x	0	2	4	6		
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

-8

2

0

10



c. $g(x) = 1$: 1 est entre -8 et 2, entre 2 et 0, entre 0 et 10 : **3 solutions**. $g(x) = 5$: seulement sur la dernière flèche : **1 solution**.

d. 0 est atteint sur la première flèche et en $x = 4$: **2 solutions**, $x = 1$ et $x = 4$.

Exercice 24 — Le sentier, à quelle altitude ?

On reprend le sentier de l'exercice 19, dont les altitudes vont de 600 m à 709 m, redescendent à 641 m, puis remontent à 750 m.

Combien de fois le randonneur passe-t-il à l'altitude de 700 m ? de 620 m ? de 750 m ? de 800 m ? Justifier à l'aide du tableau de variations.

Correction de l'exercice 24

700 m : 700 est entre 600 et 709, entre 709 et 641, entre 641 et 750 : **3 fois**.

620 m : seulement sur la première montée (la descente s'arrête à 641) : **1 fois**.

750 m : seulement à l'arrivée : **1 fois**.

800 m : jamais atteint : **0 fois**.

Balayage – Activité numérique du programme : déterminer un encadrement ou une valeur approchée par balayage d'une solution d'une équation du type $f(x) = g(x)$ lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné

Prérequis : C4, pour savoir qu'une solution existe.

Rappel de cours

On calcule $f(x)$ et $g(x)$ de proche en proche, avec un pas constant. Quand la comparaison s'inverse, la solution est entre les deux dernières valeurs testées. On recommence avec un pas dix fois plus petit.

Un encadrement donne une valeur **approchée** : on écrit $\approx$.

Exercice 25 — Un récipient cubique de 5 litres

On veut fabriquer un récipient cubique de 5 L, c'est-à-dire 5 dm^3 . On note a son arête, en décimètres : $a^3 = 5$.

- Justifier que l'équation $a^3 = 5$ a une seule solution dans $[1 ; 2]$.
- Par balayage au pas de 0,1, encadrer cette solution.
- Resserrer l'encadrement au pas de 0,01. Donner l'arête en centimètres, au millimètre près.

Correction de l'exercice 25

- La fonction cube est croissante ; $1^3 = 1$ et $2^3 = 8$, et 5 est entre 1 et 8 : une seule solution dans $[1 ; 2]$.
- $1,7^3 = 4,913 < 5$ et $1,8^3 = 5,832 > 5$: $1,7 < a < 1,8$.
- $1,70^3 = 4,913 < 5$ et $1,71^3 \approx 5,0002 > 5$: $1,70 < a < 1,71$. L'arête mesure environ 17,1 cm.

Exercice 26 — Quand deux courbes se croisent

On considère $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et $g(x) = 2x$. On admet que l'équation $f(x) = g(x)$ a une seule solution dans l'intervalle $[3 ; 4]$.

- Calculer $f(3)$, $g(3)$, $f(4)$ et $g(4)$. Comparer.
- Par balayage au pas de 0,1, puis de 0,01, encadrer la solution. Présenter les calculs dans un tableau : x , $f(x)$, $g(x)$, comparaison.

Correction de l'exercice 26

- $f(3) = 27 - 27 + 4 = 4 < g(3) = 6$ et $f(4) = 64 - 48 + 4 = 20 > g(4) = 8$: la comparaison s'inverse.
-

x	3,2	3,3	3,23	3,24
$f(x)$	6,048	7,267	$\approx 6,400$	$\approx 6,519$
$g(x)$	6,4	6,6	6,46	6,48
comparaison	$f < g$	$f > g$	$f < g$	$f > g$

$3,2 < x < 3,3$, puis $3,23 < x < 3,24$.

Exercice 27 — Un programme de balayage

On donne le programme Python suivant.

```

1 def f(x):
2     return x**3 + x
3
4 x = 1
5 while f(x) < 5:
6     x = x + 0.1
7 print(round(x - 0.1, 1), "< solution <", round(x, 1))

```

- Quelle équation ce programme cherche-t-il à résoudre ?
- Justifier que cette équation a une seule solution dans $[1; 2]$: calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f'(x)$.
- Faire fonctionner le programme à la main : écrire les valeurs successives de x et de $f(x)$ jusqu'à l'arrêt. Qu'affiche-t-il ?
- Que faut-il modifier pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 ?

Correction de l'exercice 27

- $x^3 + x = 5$.
- $f(1) = 2$, $f(2) = 10$ et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f croît de 2 à 10 et passe une seule fois par 5.
- $f(1) = 2$; $f(1,1) = 2,431$; $f(1,2) = 2,928$; $f(1,3) = 3,497$; $f(1,4) = 4,144$; $f(1,5) = 4,875$; $f(1,6) = 5,696$: arrêt. Le programme affiche `1.5 < solution < 1.6`.
- Remplacer 0.1 par 0.01 aux deux endroits où il figure, et arrondir à 2 chiffres au lieu de 1 dans les deux `round`. Il affiche alors `1.51 < solution < 1.52`.

C2 à C5 – Réinvestissement dans un problème d'optimisation

Mobilise toutes les capacités du chapitre.

Rappel de cours

- Variable et intervalle.
- Expression développée.
- Dérivée.
- Racines de la dérivée dans l'intervalle.
- Tableau de variations.
- Réponse avec l'unité.

Exercice 28 — Le plateau en carton

Dans une feuille de carton fort de 32 cm sur 20 cm, on découpe un carré de côté x , en centimètres, à chaque coin, puis on relève les bords pour former un plateau sans couvercle. Son volume, en cm^3 , est $V(x) = x(32 - 2x)(20 - 2x)$.

- Justifier que $0 < x < 10$.
- Développer $V(x)$, puis calculer $V'(x)$.
- On admet que $V'(x) = 4(x - 4)(3x - 40)$. Le vérifier, puis donner les racines de V' . Lesquelles sont dans $]0; 10[$?
- Dresser le tableau de variations de V sur $[0; 10]$.
- Donner les dimensions et le volume du plateau le plus grand.
- Combien de valeurs de x donnent un plateau de 1000 cm^3 ? Encadrer la plus petite au dixième par balayage.

Correction de l'exercice 28

- a. On retire $2x$ sur la largeur de 20 cm : $x > 0$ et $2x < 20$.
b. $(32 - 2x)(20 - 2x) = 640 - 64x - 40x + 4x^2 = 4x^2 - 104x + 640$, donc $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 640x$ et $V'(x) = 12x^2 - 208x + 640$.
c. $4(x - 4)(3x - 40) = 4(3x^2 - 40x - 12x + 160) = 12x^2 - 208x + 640$. ✓ Racines 4 et $\frac{40}{3} \approx 13,3$; seule 4 est dans $]0 ; 10[$.
d. $V(4) = 4 \times 24 \times 12 = 1\,152$.

x	0	4	10	
$V'(x)$		$+$	0	$-$
$V(x)$		0 $\nearrow$ $1\ 152$ $\searrow$ 0		

- e. Pour $x = 4$ cm : plateau de 24 cm sur 12 cm sur 4 cm, volume $1\,152 \text{ cm}^3$.
f. 1 000 est entre 0 et 1 152 sur chacune des deux flèches : **2 valeurs**. $V(2) = 896 < 1\,000 < V(3) = 1\,092$; $V(2,4) \approx 992 < 1\,000 < V(2,5) = 1\,012,5$: **2,4 < x < 2,5**.

Exercice 29 — Le bénéfice d'un atelier de planches à découper

Un atelier fabrique des planches à découper en bois. Son bénéfice journalier, en euros, est modélisé par

$$B(x) = -0,01x^3 + 0,3x^2 + 12x - 150 \quad \text{pour } x \in [0 ; 40]$$

où x est le nombre de planches fabriquées et vendues dans la journée.

- a. Calculer $B(0)$ et interpréter. Calculer $B(20)$.
b. Calculer $B'(x)$. À la calculatrice, déterminer ses racines, au centième.
c. Dresser le tableau de variations de B sur $[0 ; 40]$; arrondir au centime.
d. Le nombre de planches est entier. Comparer $B(32)$ et $B(33)$, puis conclure : combien de planches fabriquer pour un bénéfice maximal ?
e. Combien de solutions l'équation $B(x) = 0$ a-t-elle sur $[0 ; 40]$? Par balayage de 1 en 1, trouver à partir de combien de planches l'atelier ne perd plus d'argent.

Correction de l'exercice 29

- a. $B(0) = -150$ £ : sans aucune vente, l'atelier perd 150 € par jour (ses charges fixes). $B(20) = -80 + 120 + 240 - 150 = 130$ £.
b. $B'(x) = -0,03x^2 + 0,6x + 12$. Racines : $x_1 \approx -12,36$ et $x_2 \approx 32,36$; seule x_2 est dans $[0 ; 40]$.
c. $a = -0,03 < 0$: B' positive entre les racines, donc sur $[0 ; 32,36]$, puis négative. $B(32,36) \approx 213,61$ et $B(40) = -640 + 480 + 480 - 150 = 170$.

x	0	$\approx 32,36$	40
$B'(x)$		$\begin{matrix} \vdots \\ + & 0 & - \\ \vdots \end{matrix}$	
$B(x)$	-150	$\approx 213,61$	170

- d. $B(32) = 213,52$ et $B(33) = 213,33$: **32 planches**, pour un bénéfice d'environ 213,52 €.
e. Première flèche, de -150 à 213,61 : une solution ; seconde, de 213,61 à 170 : aucune. **1 solution**. $B(10) = -10 < 0$ et $B(11) = 4,99 > 0$: l'atelier ne perd plus d'argent à partir de **11 planches** par jour.