

Version élève

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 4****Fonctions polynômes de degré 3**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Nom : Classe :

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les capacités du chapitre dans l'ordre du cours. Pour chaque exercice, écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec l'unité quand la grandeur en a une. La calculatrice graphique est nécessaire aux exercices 15, 19, 25 à 29. Dans tout le cahier, les racines de la dérivée s'obtiennent sans formule : forme factorisée donnée, facteur commun, racine connue ou calculatrice. Les corrigés figurent dans la version professeur.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Étudier la fonction cube : dérivée, variations, représentation graphique	1 à 4	2
C2 – Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3	5 à 9	4
C3 – Dresser, à partir du signe de la dérivée, le tableau de variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3	10 à 16	7
C5 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer les éventuels extremums locaux de la fonction f	17 à 20	12
C4 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = c$, où c est un nombre réel	21 à 24	15
Activité numérique du programme – Déterminer un encadrement ou une valeur approchée par balayage d'une solution d'une équation du type $f(x) = g(x)$ lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné	25 à 27	18
C2 à C5 – Réinvestissement dans un problème d'optimisation	28 et 29	21

C1 – Étudier la fonction cube : dérivée, variations, représentation graphique

Exigible. Prérequis : calculer une puissance, placer un point dans un repère.

Rappel de cours

La fonction cube est $f(x) = x^3$. Le cube d'un nombre négatif est négatif : $(-2)^3 = -8$.

Sa dérivée est $f'(x) = 3x^2$: elle est positive, et nulle seulement en 0. La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

En 0, la tangente est horizontale mais il n'y a **pas d'extremum** : la dérivée s'annule sans changer de signe.

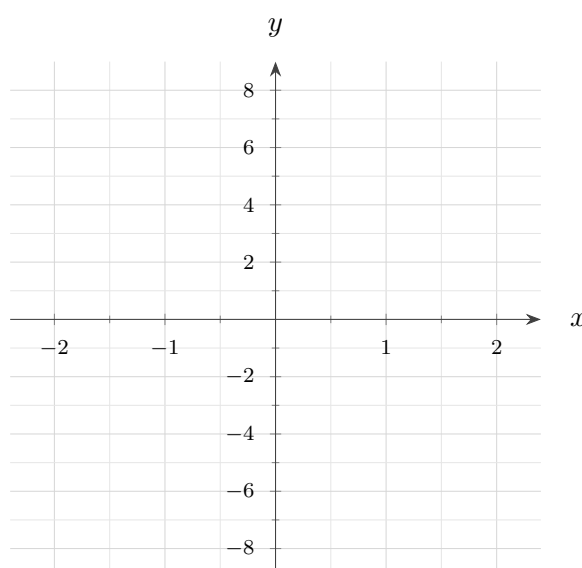
Exercice 1 — Tableau de valeurs et courbe de la fonction cube

On considère la fonction cube $f(x) = x^3$.

a. Compléter le tableau de valeurs.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

b. Placer les neuf points dans le repère ci-dessous, puis tracer la courbe à main levée.



Repère vierge : la grille est tracée tous les 0,5 horizontalement et tous les 1 verticalement.

c. Comparer $f(1,5)$ et $f(-1,5)$. Que peut-on en déduire pour la courbe ?

Exercice 2 — La puissance du vent

La puissance du vent qui traverse la surface balayée par les pales d'une éolienne est donnée, en watts, par

$$P = 0,6 \times S \times v^3$$

où S est l'aire balayée par les pales, en m^2 , et v la vitesse du vent, en m/s . Pour une petite éolienne, $S = 7 \text{ m}^2$.

- Montrer que, pour cette éolienne, $P(v) = 4,2 v^3$.
- Calculer la puissance du vent pour $v = 5 \text{ m/s}$, puis pour $v = 10 \text{ m/s}$.
- Quand la vitesse du vent double, par combien la puissance est-elle multipliée ? Justifier à l'aide de la fonction cube.
- Calculer $P'(v)$ et en déduire le sens de variation de P sur $[0 ; 12]$.

Exercice 3 — Dérivée et variations de la fonction cube

La dérivée de la fonction cube $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

- Calculer $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
- Quel est le signe de $f'(x)$? Pour quelle valeur de x s'annule-t-elle ?
- Dresser le tableau de variations de f sur $[-2 ; 2]$, en y portant $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.
- Sans calculer, comparer $f(-1,7)$ et $f(1,2)$. Justifier.

Exercice 4 — Une dérivée nulle, et pourtant

Un élève écrit : « Pour la fonction cube, $f'(0) = 0$. Donc la fonction cube admet un minimum en 0. »

- Calculer $f(-0,5)$, $f(0)$ et $f(0,5)$.
- Donner le signe de $f'(x) = 3x^2$ juste avant 0 et juste après 0.
- Expliquer l'erreur de l'élève.
- Citer une fonction étudiée en Première dont la dérivée s'annule en 0 *en changeant de signe*, et qui a bien un minimum en 0.

C2 – Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Exigible. Prérequis : dérivées de Première (constantes, fonctions affines, carré).

Rappel de cours

$f(x)$	k	$ax + b$	x^2	x^3
$f'(x)$	0	a	$2x$	$3x^2$

Règles : $(kf)' = k f'$ et $(f + g)' = f' + g'$. Donc $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Un produit se **développe** avant d'être dérivé.

Exercice 5 — Six dérivées immédiates

Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- $f(x) = 4x^3$
- $g(x) = x^3 - 7$
- $h(x) = -x^3 + 2x$
- $k(x) = 5x^2 - 3x + 1$
- $m(x) = -2x^3 + 6x^2$
- $p(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2x - 4$

Exercice 6 — Coefficients, puis dérivée

Pour chaque fonction, écrive sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, relever les coefficients, puis calculer la dérivée.

Fonction	a	b	c	d	Dérivée
$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$					
$g(x) = -2x^3 + 4x - 3$					
$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$					

Calculer ensuite $h'(1)$ et $h'(3)$. Que peut-on dire des tangentes à la courbe de h aux points d'abscisses 1 et 3 ?

Exercice 7 — Développer avant de dériver

Développer chaque expression, puis la dériver.

a. $f(x) = x(x^2 - 5)$ **b.** $g(x) = (x + 2)(x^2 - 1)$ **c.** $h(x) = x^2(6 - x)$

Exercice 8 — *Le volume d'un ballon qui se gonfle*

On gonfle un ballon sphérique. Quand son rayon vaut r centimètres, son volume, en cm^3 , est $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

- Calculer le volume du ballon pour un rayon de 10 cm. Arrondir au cm^3 , puis convertir en litres.
- Calculer $V'(r)$.
- Calculer $V'(10)$, arrondi à l'unité. Quand le rayon passe de 10 cm à 10,1 cm, de combien le volume augmente-t-il environ ?
- L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$. Que remarque-t-on ?

Exercice 9 — *Deux contrôles*

- Un élève dérive $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7$ et obtient $g'(x) = 6x^2 - 4x + 7$. Trouver ses deux erreurs et écrire la bonne dérivée.
- On donne $f(x) = ax^3 - 6x^2 + 1$, où a est un nombre inconnu. On sait que $f'(2) = 12$. Calculer $f'(x)$ en fonction de a , puis trouver a .

C3 – Dresser, à partir du signe de la dérivée, le tableau de variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Exigible. Prérequis : signe d'un polynôme de degré 2 factorisé (Première).

Rappel de cours

Racines de f' : forme factorisée donnée (la vérifier en développant) ; facteur commun x ; une racine connue x_1 , la seconde valant $\frac{c}{a \times x_1}$; sinon la calculatrice.

Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$: celui de a à l'extérieur des racines, le contraire entre elles.

Tableau : $f' > 0$, flèche qui monte ; $f' < 0$, flèche qui descend. Écrire les valeurs de f aux bornes et aux racines de f' .

Exercice 10 — Un tableau de variations pas à pas

On étudie $f(x) = x^3 - 12x + 1$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

- Calculer $f'(x)$.
- Vérifier que 2 et -2 annulent f' .
- Vérifier en développant que $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$.
- Calculer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$ et $f(3)$.
- Compléter le tableau : ligne du signe de $f'(x)$, puis flèches et valeurs.

x	-3	-2	2	3
$f'(x)$				
$f(x)$				

On étudie $k(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x$ sur l'intervalle $[-3; 2]$.

On étudie $p(x) = x^3 - 4,5x^2 + 3x + 4$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

- Calculer $p'(x)$, puis $p'(0)$, $p'(1)$, $p'(2)$ et $p'(3)$. Entre quels entiers p' change-t-elle de signe ?
- À la calculatrice, déterminer les racines de p' , arrondies au centième.
- Calculer $p(0)$ et $p(4)$, puis des valeurs approchées au centième de p aux racines de p' .
- Dresser le tableau de variations de p sur $[0 ; 4]$.

Exercice 16 — Le chariot d'une machine de découpe

Le chariot porte-outil d'une machine de découpe se déplace le long d'un rail. Sa position, en centimètres, mesurée depuis son point de départ, est donnée par

$$p(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \quad \text{pour } t \in [0; 5]$$

où t est le temps, en secondes. La dérivée $p'(t)$ est la vitesse du chariot, en cm/s.

- Calculer $p'(t)$, puis la vitesse du chariot au départ.
- On admet que $p'(t) = 3(t - 2)(t - 4)$. Le vérifier.
- Dresser le tableau de variations de p sur $[0; 5]$.
- À quels instants le chariot change-t-il de sens ? Quelle distance totale parcourt-il en 5 s ?

C5 – Exploiter le tableau de variations d’une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer les éventuels extremums locaux de la fonction f

Exigible. Prérequis : C3.

Rappel de cours

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe : de $+$ à $-$, $f(x_0)$ est un **maximum local** ; de $-$ à $+$, un **minimum local**.

Si f' s'annule sans changer de signe : **pas d'extremum.**

La plus grande ou la plus petite valeur sur l'intervalle peut se trouver à une **borne** : toujours comparer avec les valeurs aux bornes.

Exercice 17 — Lire les extremums sur un tableau

Le tableau de variations d'une fonction f sur $[-4; 3]$ est donné ci-dessous.

x	-4	-2	1	3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	6	-3	5	

- Sur quels intervalles f est-elle croissante ? décroissante ?
- Donner les extremums locaux de f : valeur, abscisse et nature.
- Quelle est la plus grande valeur de f sur $[-4; 3]$? la plus petite ?
- Donner le signe de $f'(-3)$, de $f'(0)$ et de $f'(2)$.

On étudie $q(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$. On admet que $q'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$.

- Donner le signe de q' sur $[0; 3]$.
- Calculer $q(0)$, $q(1)$, $q(2)$ et $q(3)$, puis dresser le tableau de variations.
- Donner les extremums locaux de q et leur nature.
- Quelles sont la plus grande et la plus petite valeur de q sur $[0; 3]$? Coïncident-elles avec les extremums locaux ?

Exercice 19 — Le profil d'un sentier de randonnée

Le profil d'un sentier de randonnée de 5 km est modélisé par

$$A(x) = 12x^3 - 90x^2 + 180x + 600 \quad \text{pour } x \in [0; 5]$$

où x est la distance parcourue depuis le départ, en kilomètres, et $A(x)$ l'altitude, en mètres.

- Calculer l'altitude du départ et celle de l'arrivée.
- Calculer $A'(x)$. Vérifier qu'aucun entier de 0 à 5 n'annule A' .
- À la calculatrice, déterminer les racines de A' , arrondies au centième.
- Dresser le tableau de variations de A sur $[0; 5]$; arrondir les altitudes au mètre.
- Interpréter les extremums locaux pour le randonneur. Quel est le point le plus haut du parcours ?

Exercice 20 — Un élève conclut trop vite

Pour $r(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, un élève résout $r'(x) = 0$, trouve $x = 2$ et conclut : « r admet un extremum en 2. »

- Calculer $r'(x)$ et vérifier que $r'(x) = 3(x-2)^2$.
- Donner le signe de $r'(x)$ avant et après 2.
- L'élève a-t-il raison ? Contrôler avec $r(1,9)$, $r(2)$ et $r(2,1)$.

C4 – Exploiter le tableau de variations d'une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 pour déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = c$, où c est un nombre réel

Exigible. Prérequis : C3.

Rappel de cours

Sur chaque flèche, l'équation $f(x) = c$ a **une** solution si c est compris entre les deux valeurs écrites aux extrémités de la flèche, bornes comprises ; sinon aucune.

On additionne flèche par flèche, sans compter deux fois un sommet commun à deux flèches.

Graphiquement : points d'intersection de la courbe avec la droite $y = c$.

Exercice 21 — Compter sur un tableau donné

On reprend le tableau de variations de l'exercice 17.

x	-4	-2	1	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	2 ↗ 6 ↘ -3 ↗ 5				

Combien de solutions chaque équation possède-t-elle sur $[-4; 3]$? Justifier flèche par flèche.

a. $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = 4$ **c.** $f(x) = 6$ **d.** $f(x) = 7$ **e.** $f(x) = -3$ **f.** $f(x) = 5$

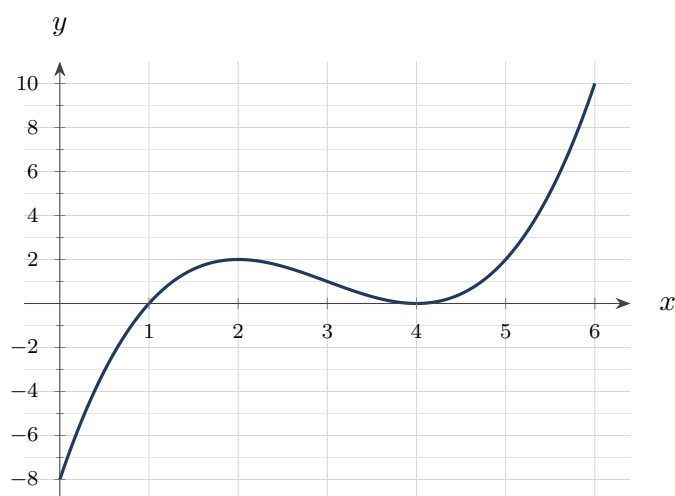
Exercice 22 — *Compter à partir d'une étude*

On reprend $f(x) = x^3 - 12x + 1$ étudiée sur $[-3; 3]$ à l'exercice 10. En utilisant son tableau de variations, donner le nombre de solutions de chaque équation sur $[-3; 3]$, en justifiant.

- a.** $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = -10$ **c.** $f(x) = 12$ **d.** $f(x) = 20$

Exercice 23 — Lire sur la courbe, justifier par le tableau

La courbe de $g(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 12x - 8$ est tracée ci-dessous sur $[0 ; 6]$.



— C_g

Repère : x en abscisse, $y = g(x)$ en ordonnée ; grille de 1 en 1.

- Lire sur la courbe les extremums locaux de g et les abscisses où ils sont atteints.
- On admet que $g'(x) = 1,5(x - 2)(x - 4)$. Calculer $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$, puis dresser le tableau de variations de g .
- Tracer les droites $y = 1$ et $y = 5$ sur la figure. Combien de solutions ont les équations $g(x) = 1$ et $g(x) = 5$? Le justifier aussi par le tableau.
- Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle ? Les lire.

Exercice 24 — *Le sentier, à quelle altitude ?*

On reprend le sentier de l'exercice 19, dont les altitudes vont de 600 m à 709 m, redescendent à 641 m, puis remontent à 750 m.

Combien de fois le randonneur passe-t-il à l'altitude de 700 m ? de 620 m ? de 750 m ? de 800 m ? Justifier à l'aide du tableau de variations.

Balayage – Activité numérique du programme : déterminer un encadrement ou une valeur approchée par balayage d'une solution d'une équation du type $f(x) = g(x)$ lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné

Prérequis : C4, pour savoir qu'une solution existe.

Rappel de cours

On calcule $f(x)$ et $g(x)$ de proche en proche, avec un pas constant. Quand la comparaison s'inverse, la solution est entre les deux dernières valeurs testées. On recommence avec un pas dix fois plus petit.

Un encadrement donne une valeur **approchée** : on écrit $\approx$.

Exercice 25 — *Un récipient cubique de 5 litres*

On veut fabriquer un récipient cubique de 5 L, c'est-à-dire 5 dm^3 . On note a son arête, en décimètres : $a^3 = 5$.

- Justifier que l'équation $a^3 = 5$ a une seule solution dans $[1 ; 2]$.
- Par balayage au pas de 0,1, encadrer cette solution.
- Resserrer l'encadrement au pas de 0,01. Donner l'arête en centimètres, au millimètre près.

On considère $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et $g(x) = 2x$. On admet que l'équation $f(x) = g(x)$ a une seule solution dans l'intervalle $[3; 4]$.

- a.** Calculer $f(3)$, $g(3)$, $f(4)$ et $g(4)$. Comparer.
- b.** Par balayage au pas de 0,1, puis de 0,01, encadrer la solution. Présenter les calculs dans un tableau : x , $f(x)$, $g(x)$, comparaison.

Exercice 27 — Un programme de balayage

On donne le programme Python suivant.

```
1 def f(x):
2     return x**3 + x
3
4 x = 1
5 while f(x) < 5:
6     x = x + 0.1
7 print(round(x - 0.1, 1), "< solution <", round(x, 1))
```

- Quelle équation ce programme cherche-t-il à résoudre ?
- Justifier que cette équation a une seule solution dans $[1 ; 2]$: calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f'(x)$.
- Faire fonctionner le programme à la main : écrire les valeurs successives de x et de $f(x)$ jusqu'à l'arrêt. Qu'affiche-t-il ?
- Que faut-il modifier pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 ?

C2 à C5 – Réinvestissement dans un problème d'optimisation

Mobilise toutes les capacités du chapitre.

Rappel de cours

1. Variable et intervalle. 2. Expression développée. 3. Dérivée. 4. Racines de la dérivée dans l'intervalle. 5. Tableau de variations. 6. Réponse avec l'unité.

Exercice 28 — Le plateau en carton

Dans une feuille de carton fort de 32 cm sur 20 cm, on découpe un carré de côté x , en centimètres, à chaque coin, puis on relève les bords pour former un plateau sans couvercle. Son volume, en cm^3 , est $V(x) = x(32 - 2x)(20 - 2x)$.

- Justifier que $0 < x < 10$.
- Développer $V(x)$, puis calculer $V'(x)$.
- On admet que $V'(x) = 4(x - 4)(3x - 40)$. Le vérifier, puis donner les racines de V' . Lesquelles sont dans $]0; 10[$?
- Dresser le tableau de variations de V sur $[0; 10]$.
- Donner les dimensions et le volume du plateau le plus grand.
- Combien de valeurs de x donnent un plateau de $1\,000\text{ cm}^3$? Encadrer la plus petite au dixième par balayage.

Un atelier fabrique des planches à découper en bois. Son bénéfice journalier, en euros, est modélisé par

où x est le nombre de planches fabriquées et vendues dans la journée.

- Calculer $B(0)$ et interpréter. Calculer $B(20)$.
- Calculer $B'(x)$. À la calculatrice, déterminer ses racines, au centième.
- Dresser le tableau de variations de B sur $[0; 40]$; arrondir au centime.
- Le nombre de planches est entier. Comparer $B(32)$ et $B(33)$, puis conclure : combien de planches fabriquer pour un bénéfice maximal ?
- Combien de solutions l'équation $B(x) = 0$ a-t-elle sur $[0; 40]$? Par balayage de 1 en 1, trouver à partir de combien de planches l'atelier ne perd plus d'argent.