

Version professeur

Mathématiques – Terminale Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 2****Probabilités**

Édition : 23 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les quatre capacités du chapitre, dans l'ordre du cours. Une règle est nécessaire : plusieurs exercices demandent de **dessiner** un arbre, dans le cadre prévu. Écrire chaque calcul, puis une phrase de réponse. Garder les valeurs exactes, ou les fractions, jusqu'à la fin ; n'arrondir qu'au dernier résultat. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Représenter par un arbre de probabilités pondéré une situation aléatoire donnée	1 à 6	2
C2 – Exploiter la lecture d'un arbre de probabilités pondéré pour déterminer les probabilités des événements associés aux différents chemins	7 à 10	6
C3 – Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales	11 à 16	8
C2 (suite) – Exploiter la lecture d'un arbre : probabilité sachant le résultat	17 à 19	11
C4 – Montrer que deux événements sont indépendants	20 à 25	13
Aller plus loin – Simuler deux épreuves en Python	26	16

La capacité C2 revient après C3 : pour « remonter » un arbre, il faut d'abord savoir calculer la probabilité d'un résultat par plusieurs chemins. Les exercices 8, 10, 12, 13 et 17 reprennent les situations des exercices 2, 5, 3, 4 et 7 : on garde l'arbre déjà construit. L'exercice 26 est facultatif.

C1 – Représenter par un arbre de probabilités pondéré une situation aléatoire donnée

Exigible. Prérequis de Première : tableau croisé, probabilité conditionnelle $P_A(B)$.

Rappel de cours

Un arbre pondéré se lit de gauche à droite. **Premier niveau** : $P(A)$ et $P(\bar{A})$. **Second niveau** : des probabilités **sachant** le nœud d'où part la branche, comme $P_A(B)$.

Depuis un tableau croisé : premier niveau = total de la ligne $\div$ effectif total ; second niveau = case $\div$ total de sa ligne. Depuis un énoncé : « parmi », « chez », « si », « quand » annoncent le second niveau.

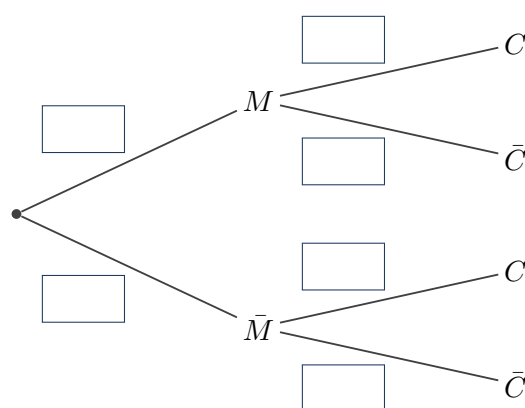
À chaque nœud, la somme des poids vaut 1.

Exercice 1 — Du tableau à l'arbre : une association sportive

Une association sportive compte 160 adhérents. On choisit un adhérent au hasard et on note M : « l'adhérent est mineur » et C : « l'adhérent fait de la compétition ».

	Compétition C	Loisir $\bar{C}$	Total
Mineur M	48	16	64
Majeur $\bar{M}$	24	72	96
Total	72	88	160

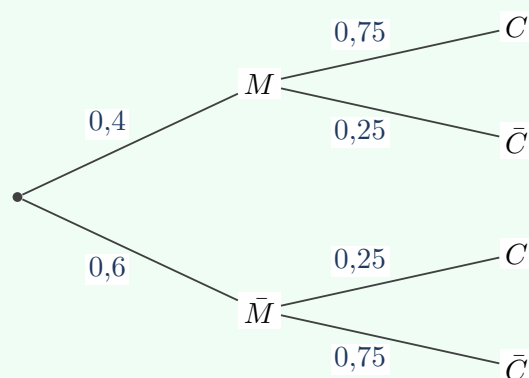
- Calculer $P(M)$ et $P(\bar{M})$.
- En ne regardant que la ligne M , calculer $P_M(C)$ et $P_M(\bar{C})$.
- En ne regardant que la ligne $\bar{M}$, calculer $P_{\bar{M}}(C)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{C})$.
- Compléter l'arbre pondéré.



Arbre à compléter, lu de gauche à droite : premier niveau, mineur M ou majeur $\bar{M}$; second niveau, compétition C ou loisir $\bar{C}$.

Correction de l'exercice 1

- $P(M) = \frac{64}{160} = 0,4$ et $P(\bar{M}) = \frac{96}{160} = 0,6$.
- $P_M(C) = \frac{48}{64} = 0,75$ et $P_M(\bar{C}) = \frac{16}{64} = 0,25$.
- $P_{\bar{M}}(C) = \frac{24}{96} = 0,25$ et $P_{\bar{M}}(\bar{C}) = \frac{72}{96} = 0,75$.
-

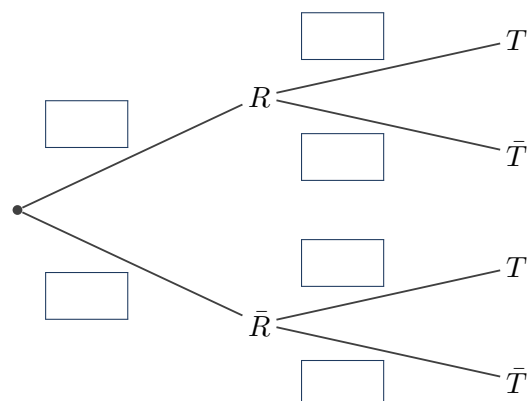


Contrôle : à chaque nœud, la somme vaut 1. L'erreur à surveiller est $\frac{48}{160} = 0,3$ sur la branche de M à C : c'est la probabilité du chemin $M \cap C$, pas le poids de la branche.

Exercice 2 — Des pourcentages à l'arbre : la livraison des colis

Une boutique en ligne livre 65 % de ses colis en point relais, les autres à domicile. Un colis livré en point relais arrive en retard dans 4 % des cas ; un colis livré à domicile, dans 9 % des cas. On choisit un colis au hasard et on note R : « le colis est livré en point relais » et T : « le colis arrive en retard ».

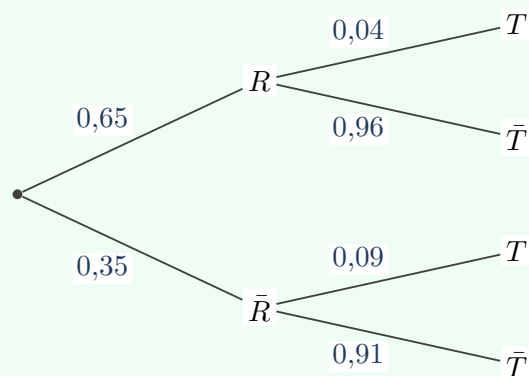
- Parmi les trois pourcentages de l'énoncé, lequel porte sur *tous* les colis ?
- Écrire la valeur de $P(R)$, $P(\bar{R})$, $P_R(T)$ et $P_{\bar{R}}(T)$.
- Compléter l'arbre pondéré.



Arbre à compléter, lu de gauche à droite : premier niveau, point relais R ou domicile $\bar{R}$; second niveau, en retard T ou à l'heure $\bar{T}$.

Correction de l'exercice 2

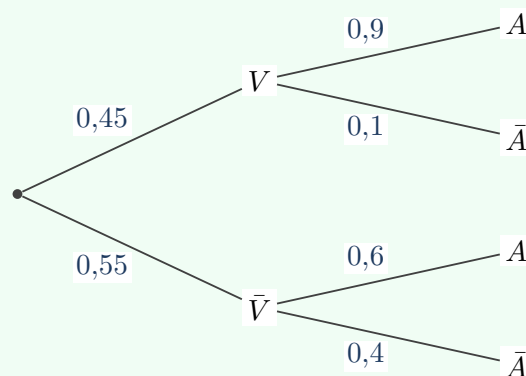
- Le « 65 % » porte sur tous les colis. Les deux autres portent sur une partie des colis : « un colis livré en point relais », « un colis livré à domicile ».
- $P(R) = 0,65$; $P(\bar{R}) = 1 - 0,65 = 0,35$; $P_R(T) = 0,04$; $P_{\bar{R}}(T) = 0,09$.
-



Exercice 3 — La déchetterie

Dans une déchetterie, 45 % des apports sont des déchets verts. 90 % des déchets verts sont valorisés (compost ou énergie) ; parmi les autres apports, 60 % sont valorisés. On choisit un apport au hasard et on note V : « l'apport est un déchet vert » et A : « l'apport est valorisé ».

Représenter la situation par un arbre pondéré complet.

Correction de l'exercice 3

Le « 45 % » porte sur tous les apports : premier niveau. « Des déchets verts » et « parmi les autres apports » annoncent des probabilités sachant V et sachant $\bar{V}$. Chaque nœud est complété par le contraire.

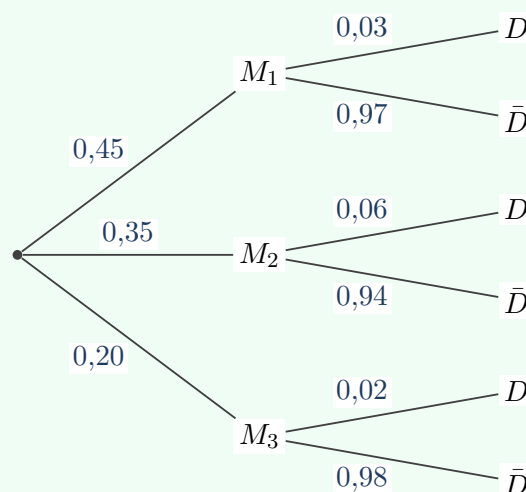
Exercice 4 — Trois machines, un arbre à trois branches

Un atelier fabrique des portes de placard sur trois machines. La machine M_1 réalise 45 % de la production, la machine M_2 35 % et la machine M_3 le reste. 3 % des portes de M_1 , 6 % des portes de M_2 et 2 % des portes de M_3 présentent un défaut (D). On choisit une porte au hasard.

- Quelle part de la production la machine M_3 réalise-t-elle ?
- Représenter la situation par un arbre pondéré à trois branches.

Correction de l'exercice 4

- $1 - 0,45 - 0,35 = 0,20$: la machine M_3 réalise 20 % de la production.
-



Contrôle : $0,45 + 0,35 + 0,20 = 1$ au premier nœud.

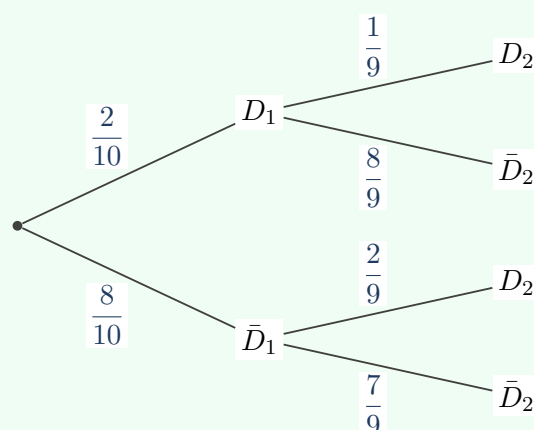
Exercice 5 — Deux ampoules tirées sans remise

Une boîte contient 10 ampoules, dont 2 défectueuses. Un électricien en prend deux au hasard, l'une après l'autre, sans remettre la première. On note D_1 : « la première ampoule est défectueuse » et D_2 : « la seconde ampoule est défectueuse ».

- Après le premier tirage, combien reste-t-il d'ampoules dans la boîte ? Combien de défectueuses, si la première était défectueuse ? Et si elle ne l'était pas ?
- Construire l'arbre pondéré, en écrivant les poids sous forme de fractions.
- Si l'électricien remettait la première ampoule dans la boîte avant de tirer la seconde, quels poids de l'arbre changeraient ?

Correction de l'exercice 5

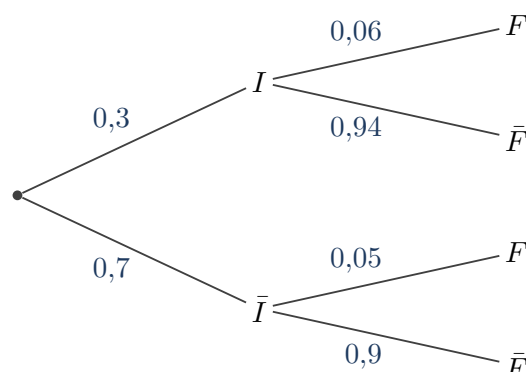
- Il reste 9 ampoules. Si la première était défectueuse, il reste 1 ampoule défectueuse ; sinon, il en reste 2.
-



- Avec remise, la boîte contient de nouveau 10 ampoules dont 2 défectueuses : les poids du second niveau deviennent $\frac{2}{10}$ et $\frac{8}{10}$ sous *chaque* nœud. Ce sont eux seuls qui changent ; le premier niveau est le même.

Exercice 6 — L'arbre de Yanis

Situation : « Dans un lycée, 30 % des élèves sont internes. 20 % des internes participent à l'atelier du soir, contre 5 % des externes. » On note I : « l'élève est interne » et F : « l'élève participe à l'atelier du soir ». Yanis a construit l'arbre ci-dessous.



Arbre proposé par Yanis, lu de gauche à droite : premier niveau, interne I ou externe $\bar{I}$; second niveau, participation F à l'atelier ou non. Les nombres sont ceux qu'il a écrits.

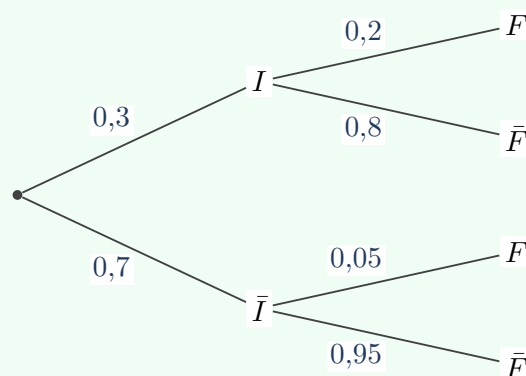
- Calculer la somme des poids à chacun des trois nœuds. Que remarque-t-on ?
- Yanis a écrit 0,06 sur la branche qui va de I à F . D'où vient ce nombre ? Pourquoi n'est-il pas à sa place ?
- Construire l'arbre correct.

Correction de l'exercice 6

a. Racine : $0,3 + 0,7 = 1$. Nœud I : $0,06 + 0,94 = 1$. Nœud $\bar{I}$: $0,05 + 0,9 = 0,95 \neq 1$: ce nœud contient une erreur (il faut 0,95 sur la branche $\bar{F}$). Le nœud I fait bien 1, et pourtant il est faux aussi : une somme juste ne prouve pas que l'arbre est juste.

b. $0,06 = 0,3 \times 0,2$: c'est la probabilité du **chemin** $I \cap F$. Sur la branche, on écrit la probabilité **sachant** I : $P_I(F) = 0,2$.

c.



C2 – Exploiter la lecture d'un arbre de probabilités pondéré pour déterminer les probabilités des événements associés aux différents chemins

Exigible. Prérequis : C1.

Rappel de cours

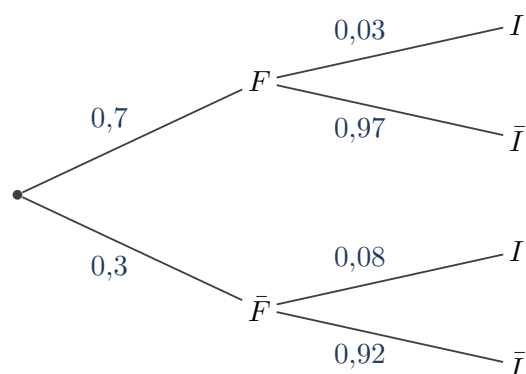
Un **chemin** représente l'intersection des événements rencontrés. Sa probabilité est le **produit** des poids de ses branches :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

La somme des probabilités de tous les chemins vaut 1. Sur un effectif N , on attend environ $N \times P(A \cap B)$ cas.

Exercice 7 — Fibre ou ADSL

Un fournisseur d'accès à internet a 70 % de clients équipés de la fibre (F), les autres de l'ADSL. Au cours d'un mois, un incident (I) touche 3 % des clients équipés de la fibre et 8 % des clients équipés de l'ADSL. On choisit un client au hasard.



Arbre de la situation, lu de gauche à droite : premier niveau, fibre F ou ADSL $\bar{F}$; second niveau, incident I ou non, sachant l'équipement.

a. Compléter : $P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = \dots \times \dots = \dots$

b. Calculer de même la probabilité des trois autres chemins.

c. Vérifier que la somme des quatre chemins vaut 1.

Correction de l'exercice 7

- a. $P(F \cap I) = 0,7 \times 0,03 = 0,021$.
 b. $P(F \cap \bar{I}) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$; $P(\bar{F} \cap I) = 0,3 \times 0,08 = 0,024$; $P(\bar{F} \cap \bar{I}) = 0,3 \times 0,92 = 0,276$.
 c. $0,021 + 0,679 + 0,024 + 0,276 = 1$.

Exercice 8 — Les colis en retard

On reprend la boutique en ligne de l'exercice 2 et son arbre.

- a. Calculer la probabilité qu'un colis soit livré à domicile et arrive en retard.
 b. Calculer la probabilité qu'un colis soit livré en point relais et arrive à l'heure.
 c. Sur 2 000 colis, combien de colis livrés à domicile arrivés en retard peut-on attendre ? Et de colis livrés en point relais arrivés en retard ?

Correction de l'exercice 8

- a. $P(\bar{R} \cap T) = 0,35 \times 0,09 = 0,0315$.
 b. $P(R \cap \bar{T}) = 0,65 \times 0,96 = 0,624$.
 c. $0,0315 \times 2000 = 63$ colis livrés à domicile en retard ; $P(R \cap T) = 0,65 \times 0,04 = 0,026$, et $0,026 \times 2000 = 52$ colis livrés en point relais en retard.

Les colis livrés à domicile sont deux fois moins nombreux, et pourtant ils donnent plus de retards : leur taux de retard est plus du double.

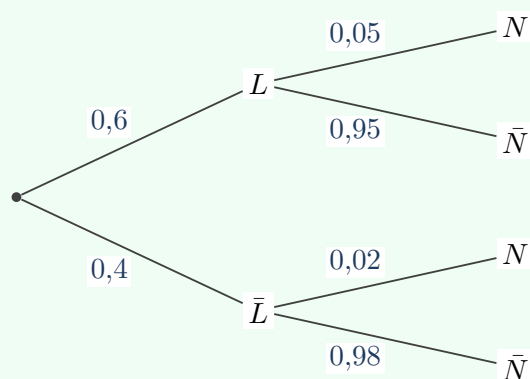
Exercice 9 — Les billets de concert

Une salle de concert vend 60 % de ses billets en ligne, les autres au guichet. 5 % des billets achetés en ligne ne sont pas utilisés le soir du concert, contre 2 % des billets achetés au guichet. On choisit un billet vendu au hasard et on note L : « le billet a été acheté en ligne » et N : « le billet n'est pas utilisé ».

- a. Représenter la situation par un arbre pondéré.
 b. Calculer la probabilité qu'un billet ait été acheté en ligne et ne soit pas utilisé.
 c. Sur 1 500 billets vendus, combien de billets achetés au guichet et non utilisés peut-on attendre ?

Correction de l'exercice 9

a.



- b. $P(L \cap N) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$.
 c. $P(\bar{L} \cap N) = 0,4 \times 0,02 = 0,008$, et $0,008 \times 1\,500 = 12$ billets.

Exercice 10 — Deux ampoules : lire l'arbre

On reprend les deux ampoules tirées sans remise de l'exercice 5 et son arbre.

- a. Calculer la probabilité que les deux ampoules soient défectueuses.
 b. Calculer la probabilité qu'aucune ampoule ne soit défectueuse.
 c. Deux chemins donnent « exactement une ampoule défectueuse ». Lesquels ? Calculer cette probabilité.
 d. Vérifier que les résultats des questions a, b et c ont pour somme 1.

Correction de l'exercice 10

- a. $P(D_1 \cap D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90} \approx 0,022$.
- b. $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{56}{90} \approx 0,622$.
- c. Les chemins $D_1 \cap \bar{D}_2$ et $\bar{D}_1 \cap D_2$: $\frac{2}{10} \times \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{90} + \frac{16}{90} = \frac{32}{90} \approx 0,356$.
- d. $\frac{2}{90} + \frac{56}{90} + \frac{32}{90} = \frac{90}{90} = 1$. Garder les fractions évite les erreurs d'arrondi dans ce contrôle.

C3 – Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales

Exigible. Prérequis : C1 et C2.

Rappel de cours

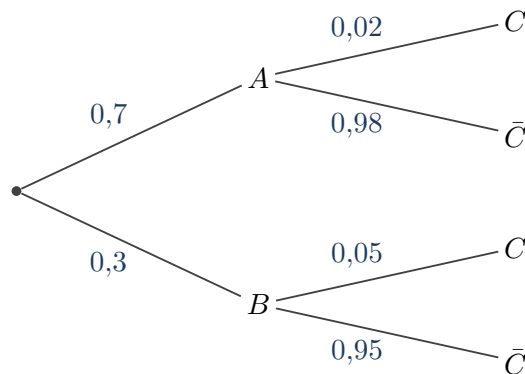
Quand plusieurs chemins mènent à un même événement B , on calcule chaque chemin puis on **additionne** :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Avec trois branches au premier niveau, on additionne trois chemins. **Contrôle** : $P(B)$ est toujours comprise entre le plus petit et le plus grand des poids $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$.

Exercice 11 — Les œufs de deux fermes

Une épicerie reçoit ses œufs de deux fermes : 70 % viennent de la ferme A , 30 % de la ferme B . À la livraison, 2 % des œufs de la ferme A et 5 % des œufs de la ferme B sont cassés (C). On choisit un œuf livré au hasard.



Arbre de la situation, lu de gauche à droite : premier niveau, la ferme ; second niveau, œuf cassé C ou intact $\bar{C}$, sachant la ferme.

- a. Quels chemins mènent à C ?
- b. Compléter la formule des probabilités totales : $P(C) = 0,7 \times \dots + \dots \times \dots = \dots$
- c. Le résultat est-il bien compris entre 2 % et 5 % ?

Correction de l'exercice 11

- a. Les chemins $A \rightarrow C$ et $B \rightarrow C$.
- b. $P(C) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$.
- c. Oui : 2,9 % est entre 2 % et 5 %. Il est plus près de 2 % parce que la ferme A , la moins touchée, fournit la plus grande part des œufs.

Exercice 12 — *La déchetterie : les apports valorisés*

On reprend la déchetterie de l'exercice 3 et son arbre.

- Calculer la probabilité qu'un apport soit valorisé.
- Sur 800 apports d'une semaine, combien d'apports valorisés peut-on attendre ?
- Calculer $P(\bar{A})$ de deux façons : avec le résultat du a, puis avec la formule des probabilités totales. Comparer.

Correction de l'exercice 12

- $P(A) = 0,45 \times 0,9 + 0,55 \times 0,6 = 0,405 + 0,33 = 0,735$.
- $0,735 \times 800 = 588$ apports.
- $P(\bar{A}) = 1 - 0,735 = 0,265$. Par les chemins : $0,45 \times 0,1 + 0,55 \times 0,4 = 0,045 + 0,22 = 0,265$. Les deux calculs concordent.

Exercice 13 — *Trois machines : le taux global de défaut*

On reprend l'atelier de portes de placard de l'exercice 4 et son arbre à trois branches.

- Calculer la probabilité qu'une porte prise au hasard présente un défaut.
- Sur 2 000 portes, combien de portes avec un défaut peut-on attendre ?
- Quelle machine fournit le plus de portes avec un défaut ? Justifier par les probabilités des chemins.

Correction de l'exercice 13

- Trois chemins mènent à D : $P(D) = 0,45 \times 0,03 + 0,35 \times 0,06 + 0,20 \times 0,02 = 0,0135 + 0,021 + 0,004 = 0,0385$.
- $0,0385 \times 2000 = 77$ portes.
- Le chemin $M_2 \rightarrow D$ a la plus grande probabilité (0,021) : la machine M_2 fournit le plus de portes avec un défaut, bien qu'elle ne réalise que 35 % de la production.

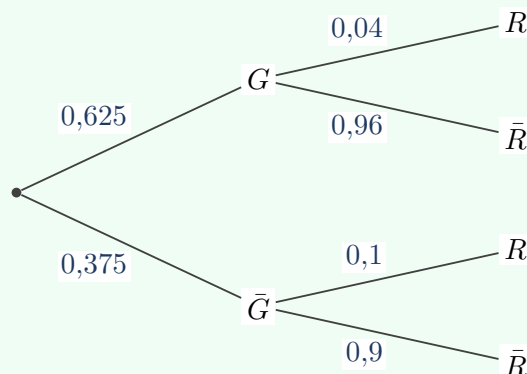
Exercice 14 — *Vérifier avec les effectifs : des téléphones reconditionnés*

Un magasin a vendu 400 téléphones reconditionnés : 250 de « grade A » (état quasi neuf) et 150 de « grade B ». Parmi eux, 10 téléphones de grade A et 15 de grade B sont revenus sous garantie. On choisit un téléphone vendu au hasard et on note G : « le téléphone est de grade A » et R : « le téléphone est revenu sous garantie ».

- Construire l'arbre pondéré (premier niveau : le grade).
- Calculer $P(R)$ avec la formule des probabilités totales.
- Vérifier le résultat avec les effectifs de l'énoncé.

Correction de l'exercice 14

$$\text{a. } P(G) = \frac{250}{400} = 0,625 ; P(\bar{G}) = 0,375 ; P_G(R) = \frac{10}{250} = 0,04 ; P_{\bar{G}}(R) = \frac{15}{150} = 0,1.$$



$$\text{b. } P(R) = 0,625 \times 0,04 + 0,375 \times 0,1 = 0,025 + 0,0375 = 0,0625.$$

c. $10 + 15 = 25$ téléphones sont revenus sur 400 : $\frac{25}{400} = 0,0625$. Les deux calculs concordent.

Exercice 15 — Quel taux accepter pour la seconde presse ?

Une imprimerie tire des brochures sur deux presses. La presse P_1 réalise 60 % des tirages, et 2 % de ses brochures sont mal imprimées. La presse P_2 réalise le reste. L'imprimerie veut qu'au total, au plus 3 % des brochures soient mal imprimées.

Quelle proportion maximale de brochures mal imprimées la presse P_2 peut-elle produire ? On pourra appeler p cette proportion, tracer l'arbre et écrire une inéquation.

Correction de l'exercice 15

Avec M : « la brochure est mal imprimée », les probabilités totales donnent $P(M) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times p = 0,012 + 0,4p$.

On veut $0,012 + 0,4p \leq 0,03$, soit $0,4p \leq 0,018$, donc $p \leq \frac{0,018}{0,4} = 0,045$.

La presse P_2 peut produire au plus **4,5 %** de brochures mal imprimées. Contrôle : $0,012 + 0,4 \times 0,045 = 0,012 + 0,018 = 0,03$.

Exercice 16 — L'erreur de Léna

Une entreprise a deux ateliers. L'atelier A_1 réalise 80 % de la production, avec 1 % de pièces défectueuses ; l'atelier A_2 réalise 20 % de la production, avec 6 % de pièces défectueuses. Pour la probabilité qu'une pièce soit défectueuse, Léna écrit :

$$P(D) = 0,01 + 0,06 = 0,07.$$

- Sans calculer, expliquer pourquoi ce résultat ne peut pas être juste.
- Calculer correctement $P(D)$.
- Expliquer l'erreur de Léna.

Correction de l'exercice 16

- Les pièces viennent d'ateliers qui ont 1 % et 6 % de défauts : le taux global est forcément **entre** 1 % et 6 %. 7 % est impossible.
- $P(D) = 0,8 \times 0,01 + 0,2 \times 0,06 = 0,008 + 0,012 = 0,02$.
- Léna a additionné les poids des branches du second niveau sans les multiplier par la probabilité de leur atelier. Chaque taux ne s'applique qu'à une partie de la production : il faut d'abord calculer chaque chemin.

C2 – Exploiter la lecture d'un arbre de probabilités pondéré pour déterminer les probabilités des événements associés aux différents chemins (suite : probabilité sachant le résultat)

Exigible. Prérequis : C3 et la définition de $P_A(B)$ vue en Première.

Rappel de cours

Quand on connaît le résultat B du second niveau et qu'on cherche la probabilité d'un événement A du premier niveau :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On calcule le chemin $A \cap B$, puis $P(B)$ par les probabilités totales, puis on divise. $P_B(A)$ et $P_A(B)$ sont deux nombres différents : toujours se demander « parmi quoi ? »

Exercice 17 — Un client signale un incident

On reprend le fournisseur d'accès de l'exercice 7. Un client signale un incident.

a. Calculer $P(I)$ avec la formule des probabilités totales.

b. Compléter : $P_I(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap I)}{P(I)} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \approx \dots\dots\dots$ (arrondir au millième).

c. Traduire ce résultat par une phrase commençant par « Parmi les clients qui signalent un incident. . . », puis comparer à la part des clients équipés de l'ADSL.

Correction de l'exercice 17

a. $P(I) = 0,021 + 0,024 = 0,045$.

b. $P_I(\bar{F}) = \frac{0,024}{0,045} \approx 0,533$.

c. Parmi les clients qui signalent un incident, environ 53 % sont équipés de l'ADSL, alors que ces clients ne représentent que 30 % de l'ensemble.

Exercice 18 — Le filtre à messages indésirables

Une messagerie reçoit des messages dont 30 % sont indésirables (S). Son filtre classe comme indésirables (C) 95 % des messages indésirables et, par erreur, 2 % des messages normaux. On choisit un message reçu au hasard.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

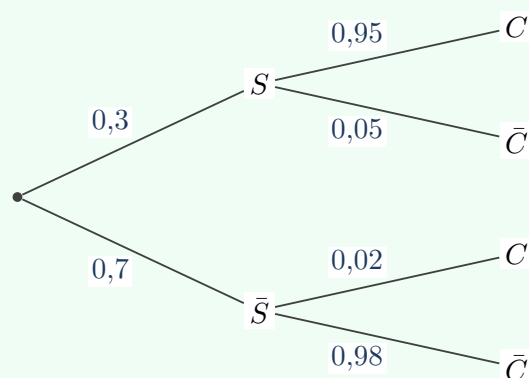
b. Calculer la probabilité qu'un message soit classé comme indésirable.

c. Un message est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité qu'il le soit vraiment ? Arrondir au millième.

d. Un message est laissé dans la boîte de réception. Quelle est la probabilité qu'il soit indésirable ? Arrondir au millième.

Correction de l'exercice 18

a.



b. $P(C) = 0,3 \times 0,95 + 0,7 \times 0,02 = 0,285 + 0,014 = 0,299$.

c. $P_C(S) = \frac{0,285}{0,299} \approx 0,953$.

d. $P(\bar{C}) = 1 - 0,299 = 0,701$ et $P(S \cap \bar{C}) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$; $P_{\bar{C}}(S) = \frac{0,015}{0,701} \approx 0,021$. Environ 2 messages sur 100 laissés dans la boîte de réception sont indésirables.

Exercice 19 — Quatre phrases, quatre probabilités

Dans une usine, les pièces sortent de deux lignes de fabrication, L_1 et L_2 . On note D : « la pièce est défectueuse ». Le responsable qualité a noté quatre phrases.

- (1) 60 % des pièces sortent de la ligne L_1 .
- (2) Parmi les pièces de la ligne L_1 , 3 % sont défectueuses.
- (3) 1,8 % des pièces sortent de la ligne L_1 et sont défectueuses.
- (4) Parmi les pièces défectueuses, 40 % sortent de la ligne L_1 .

- a. Associer à chaque phrase l'une des écritures $P(L_1)$, $P(L_1 \cap D)$, $P_{L_1}(D)$, $P_D(L_1)$, avec sa valeur.
- b. Vérifier que les phrases (1), (2) et (3) sont cohérentes.
- c. Dédire des phrases (3) et (4) la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

Correction de l'exercice 19

- a. (1) $P(L_1) = 0,6$; (2) $P_{L_1}(D) = 0,03$; (3) $P(L_1 \cap D) = 0,018$; (4) $P_D(L_1) = 0,4$.
- b. $P(L_1) \times P_{L_1}(D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018 = P(L_1 \cap D)$: cohérent.
- c. $P_D(L_1) = \frac{P(L_1 \cap D)}{P(D)}$, donc $P(D) = \frac{P(L_1 \cap D)}{P_D(L_1)} = \frac{0,018}{0,4} = 0,045$.

Les phrases (2) et (4) se ressemblent mais ne disent pas la même chose : tout est dans « parmi quoi ».

C4 – Montrer que deux événements sont indépendants

Exigible. Prérequis : C2.

Rappel de cours

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B),$$

c'est-à-dire $P_A(B) = P(B)$. Pour le montrer : calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sans arrondir, calculer le produit, comparer, conclure par une phrase.

Épreuves indépendantes : on multiplie, et $P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$. **Incompatibles** ($P(A \cap B) = 0$) ne veut pas dire indépendants.

Exercice 20 — Comparer un produit

Pour chaque ligne, dire si les événements A et B sont indépendants. Ne pas arrondir.

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A) \times P(B)$	Égalité ?	Indépendants ?
a.	0,5	0,3	0,15			
b.	0,4	0,25	0,12			
c.	0,2	0,6	0,12			
d.	0,7	0,3	0,2			

Correction de l'exercice 20

	$P(A) \times P(B)$	Comparaison avec $P(A \cap B)$	Conclusion
a.	0,15	égal	indépendants
b.	0,1	$0,1 \neq 0,12$	non indépendants
c.	0,12	égal	indépendants
d.	0,21	$0,21 \neq 0,2$	non indépendants

La ligne d. montre pourquoi on n'arrondit pas : 0,21 et 0,2 sont proches, mais différents.

Exercice 21 — Transports en commun, sport et retards

Dans une entreprise de 250 salariés, 100 salariés viennent en transports en commun (T) et 60 font du sport régulièrement (S) ; 24 salariés sont dans les deux cas. Par ailleurs, 50 salariés sont arrivés en retard au moins une fois le mois dernier (R), dont 30 parmi ceux qui viennent en transports en commun. On choisit un salarié au hasard.

- Les événements T et S sont-ils indépendants ?
- Les événements T et R sont-ils indépendants ?
- Calculer $P_T(R)$ et la comparer à $P(R)$. Interpréter.

Correction de l'exercice 21

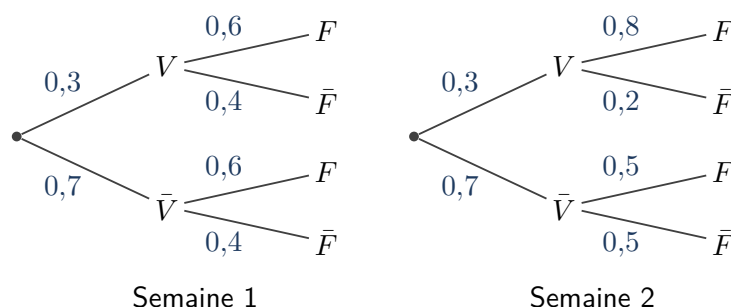
a. $P(T) = \frac{100}{250} = 0,4$; $P(S) = \frac{60}{250} = 0,24$; $P(T \cap S) = \frac{24}{250} = 0,096$. Produit : $0,4 \times 0,24 = 0,096$.
Égalité : T et S sont **indépendants**.

b. $P(R) = \frac{50}{250} = 0,2$; $P(T \cap R) = \frac{30}{250} = 0,12$. Produit : $0,4 \times 0,2 = 0,08 \neq 0,12$: T et R ne sont **pas indépendants**.

c. $P_T(R) = \frac{30}{100} = 0,3$, alors que $P(R) = 0,2$: les salariés qui viennent en transports en commun sont plus souvent arrivés en retard que l'ensemble des salariés.

Exercice 22 — Le plat végétarien et le fruit

Au self d'un lycée, 30 % des élèves choisissent le plat végétarien (V). On note F : « l'élève prend un fruit en dessert ». Voici deux arbres, relevés deux semaines différentes.



Deux arbres de même forme, lus de gauche à droite : premier niveau, plat végétarien V ou non ; second niveau, fruit F ou non. Seuls les poids du second niveau diffèrent d'une semaine à l'autre.

Pour chaque semaine :

- calculer $P(F)$ avec la formule des probabilités totales ;
- calculer $P(V \cap F)$, puis dire si V et F sont indépendants.
- Sur quel arbre pouvait-on prévoir la réponse d'un seul coup d'œil ? Pourquoi ?

Correction de l'exercice 22

Semaine 1. a. $P(F) = 0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,6 = 0,18 + 0,42 = 0,6$. b. $P(V \cap F) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$ et $P(V) \times P(F) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$: V et F sont **indépendants**.

Semaine 2. a. $P(F) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,5 = 0,24 + 0,35 = 0,59$. b. $P(V \cap F) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$ et $P(V) \times P(F) = 0,3 \times 0,59 = 0,177 \neq 0,24$: V et F ne sont **pas indépendants**.

c. Sur l'arbre de la semaine 1 : les poids du second niveau sont les **mêmes** sous V et sous $\bar{V}$ (0,6 et 0,4). Le choix du plat ne change pas la probabilité de prendre un fruit : $P_V(F) = P(F)$.

Exercice 23 — Deux pièces prélevées avec remise

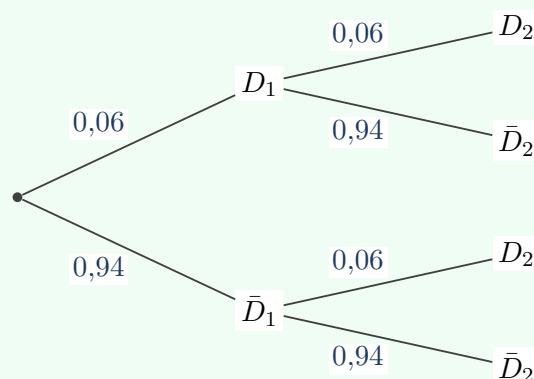
Au contrôle de réception d'une livraison, 6 % des pièces sont défectueuses. Un contrôleur prélève une pièce au hasard, la contrôle, la **remet**, puis prélève une seconde pièce au hasard. On note D_1 et D_2 les événements « la première (la seconde) pièce est défectueuse ».

- Pourquoi peut-on considérer que les deux prélèvements sont indépendants ?
- Construire l'arbre pondéré.
- Calculer la probabilité que les deux pièces soient défectueuses.
- Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.
- En déduire la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

Correction de l'exercice 23

a. La première pièce est remise : la composition de la livraison est la même au second prélèvement. Le premier résultat ne change pas la probabilité du second.

b.



c. $0,06 \times 0,06 = 0,0036$.

d. $0,94 \times 0,94 = 0,8836$.

e. $1 - 0,8836 = 0,1164$.

Contrôle possible : exactement une pièce défectueuse vaut $2 \times 0,06 \times 0,94 = 0,1128$, et $0,0036 + 0,1128 = 0,1164$.

Exercice 24 — Trois contrôles automatiques

Sur une chaîne de montage, chaque pièce passe trois contrôles automatiques successifs. Pour une pièce **bonne**, chaque contrôle la rejette par erreur avec une probabilité de 0,02, indépendamment des deux autres.

- Calculer la probabilité qu'une pièce bonne soit acceptée par les trois contrôles. Arrondir au millième.
- En déduire la probabilité qu'une pièce bonne soit rejetée par au moins un contrôle.
- Sur 5 000 pièces bonnes, combien de pièces rejetées par erreur peut-on attendre ?

Correction de l'exercice 24

- Chaque contrôle l'accepte avec une probabilité de $1 - 0,02 = 0,98$. Les contrôles étant indépendants : $0,98 \times 0,98 \times 0,98 = 0,98^3 \approx 0,941$.
- $1 - 0,98^3 = 1 - 0,941192 \approx 0,059$.
- $0,058808 \times 5\,000 \approx 294$ pièces.

Trois contrôles à 2 % d'erreur donnent presque 6 % de rejets à tort : les petites erreurs s'additionnent presque quand on les enchaîne.

Exercice 25 — Incompatibles ou indépendants ?

Une pièce est fabriquée par l'une des deux machines d'un atelier. On note A : « la pièce vient de la machine 1 » et B : « la pièce vient de la machine 2 », avec $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$. Mehdi affirme : « Une pièce ne peut pas venir des deux machines, donc A et B sont indépendants, et $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$. »

- Que vaut réellement $P(A \cap B)$?
- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
- Quel mot Mehdi aurait-il dû employer ?

Correction de l'exercice 25

- Une pièce ne peut pas venir des deux machines : $A \cap B$ est impossible, donc $P(A \cap B) = 0$.
- $P(A) \times P(B) = 0,24 \neq 0$: A et B ne sont **pas** indépendants. D'ailleurs, savoir que la pièce vient de la machine 1 rend B impossible : $P_A(B) = 0 \neq 0,4$.
- A et B sont **incompatibles**. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Aller plus loin – Simuler deux épreuves en Python

Facultatif. Relie le chapitre au module transversal d'algorithmique et programmation ; ne remplace pas le calcul par l'arbre.

Exercice 26 — Simuler au lieu de calculer

Le programme ci-dessous, écrit en Python, simule 10 000 fois les deux prélèvements avec remise de l'exercice 23.

```
1 from random import random
2
3 def defectueuse():
4     return random() < 0.06
5
6 n = 10000
7 compteur = 0
8 for i in range(n):
9     p1 = defectueuse()
10    p2 = defectueuse()
11    if p1 or p2:
12        compteur = compteur + 1
13 print(compteur / n)
```

- La fonction `defectueuse()` renvoie `True` ou `False`. Avec quelle probabilité renvoie-t-elle `True` ?
- Que compte la variable `compteur` ?
- Autour de quelle valeur le nombre affiché devrait-il se trouver ? Utiliser l'exercice 23.
- Quelle modification de la ligne `if` permettrait d'estimer la probabilité que les deux pièces soient défectueuses ?

Correction de l'exercice 26

- `random()` donne un nombre au hasard entre 0 et 1 ; il est inférieur à 0,06 avec une probabilité de 0,06. La fonction simule donc une pièce défectueuse avec la probabilité 0,06.
- Le nombre de simulations où **au moins une** des deux pièces est défectueuse (`or` veut dire « ou »).
- Autour de 0,1164, la probabilité calculée à l'exercice 23 e. Le nombre affiché varie d'une exécution à l'autre, mais reste proche de cette valeur.
- Remplacer `or` par `and` : `if p1 and p2:`. Le nombre affiché sera alors proche de 0,0036.

Conduite : exercice facultatif, qui relie le chapitre au module transversal d'algorithmique. Il ne remplace pas le calcul par l'arbre.