

Fiche de cours — Théorème de Pythagore et sa réciproque

Tout le cours en deux pages, recto-verso. À garder sous les yeux pendant les exercices et à relire avant l'évaluation.

1. La configuration

Hypoténuse

Le côté **opposé** à l'angle droit. Trois façons de le repérer :
 — il ne touche pas le petit carré ;
 — c'est le **plus grand** des trois côtés ;
 — dans « rectangle en A », son nom ne contient pas la lettre A .

Erreur fréquente

« C'est le côté du bas », « celui qui est penché ». La position sur la feuille ne décide de rien : cherchez le petit carré.

2. Le théorème

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{rectangle en } A)$$

Dans quel sens ?

Hypoténuse cherchée : on **additionne** les carrés.
Côté de l'angle droit cherché : on **soustrait**, en partant du carré de l'hypoténuse.

Deux contrôles de bon sens

L'hypoténuse est plus **grande** que chacun des deux côtés, et plus **petite** que leur somme.
 Un carré n'est jamais négatif : si la soustraction donne un nombre négatif, on n'est pas parti de l'hypoténuse.

3. La distance en pente

Un plan est une vue de dessus

Le décamètre suit le sol, le plan ne retient que l'**horizontale**. La mesure du terrain est l'**hypoténuse** : elle est toujours la plus grande.

Du terrain vers le plan : on **soustrait** le carré du dénivelé.
 Du plan vers le matériau : on **additionne**.

4. La réciproque

Prouver l'angle droit

Si le carré du **plus grand** côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est rectangle.

Rédaction : deux calculs *séparés*, puis une comparaison, puis une phrase.

Erreur fréquente

Écrire « $13^2 = 5^2 + 12^2$ donc... » revient à supposer ce qu'on veut prouver.

5. Théorème, réciproque, absurde

Théorème si rectangle, alors $c^2 = a^2 + b^2$

Réciproque si $c^2 = a^2 + b^2$, alors rectangle

La **réciproque** d'un énoncé vrai peut être fausse : « si un

nombre se termine par 0 il est pair » est vrai, l'inverse est faux — 14 le montre.

Le contrôle d'équerrage : par l'absurde

Supposons le panneau d'équerre. **Alors** sa diagonale vaudrait 150. **Or** elle mesure 152 : impossible. **Donc** il n'est pas d'équerre.

Si la diagonale tombe juste, on conclut par la **réciproque** qu'il est d'équerre.

6. Les triplets

$$3 - 4 - 5 \quad 5 - 12 - 13 \quad 8 - 15 - 17$$

Et tous leurs multiples

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2$$

6-8-10, 9-12-15, 30-40-50... Aggrandir un triangle rectangle le laisse rectangle.

Trois entiers ne suffisent pas

5, 6, 7 : $25 + 36 = 61$ et $7^2 = 49$. Ce n'est pas un triplet.

La règle du 3-4-5 : 3 m sur un mur, 4 m sur l'autre, la diagonale doit faire 5 m. Sur un grand ouvrage, employer un multiple : l'angle est plus précis.

7. Raisonner

Le contre-exemple

Pour réfuter un « tout... est... », un **seul** cas qui ne marche pas suffit.

« Trois entiers consécutifs forment un triplet » : 2, 3, 4 donne $4 + 9 = 13$ et $4^2 = 16$. Faux.

Un exemple ne démontre rien

Trouver que 3-4-5 marche ne prouve pas que tous marchent. Les deux ne pèsent pas le même poids.

La disjonction des cas

Quand l'énoncé ne dit pas quel côté est l'hypoténuse, on examine **tous** les cas et on écarte les impossibles.

Deux côtés de 6 et 10 :

$$10 \text{ hypoténuse} \rightarrow x = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$6 \text{ et } 10 \text{ autour de l'angle droit} \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11,66$$

6 hypoténuse $\rightarrow$ impossible, 6 n'est pas le plus grand.

Deux réponses, pas une.

8. Dans l'espace

$$D = \sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}$$

La grande diagonale d'un pavé : Pythagore **deux fois**, d'abord dans le fond, puis dans le plan vertical. C'est la plus grande longueur d'un objet rigide qui peut y entrer.

Pour aller plus loin (non évalué) : dans un repère, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

9. Au tableur

Tester un triplet

=SI(A2^2+B2^2=C2^2;"oui";"non")

Écrit une fois en D2, puis recopié : les références suivent la ligne.

A2*2 n'est pas A2^2

L'un est le *double*, l'autre le *carré*. Contrôlez une ligne dont vous connaissez la réponse.

Le tableur **cherche** les triplets ; la liste ne fait que les rappeler.

Je sais faire

- ☐ repérer l'hypoténuse de trois façons ;
- ☐ calculer l'hypoténuse, et un côté de l'angle droit ;
- ☐ réduire une distance mesurée en pente à l'horizontale ;
- ☐ prouver qu'un triangle est rectangle, en deux calculs séparés ;
- ☐ distinguer le théorème et sa réciproque ;
- ☐ rédiger un contrôle d'équerrage par l'absurde ;
- ☐ reconnaître 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17 et leurs multiples ;
- ☐ réfuter une affirmation par un contre-exemple ;
- ☐ mener une disjonction des cas et écarter l'impossible ;
- ☐ calculer la diagonale d'un pavé ;
- ☐ écrire au tableur le test d'un triplet et le recopier.