

Version professeur

Mathématiques – Seconde Bac Pro**Cours et applications****Chapitre 12****Théorème de Pythagore et sa réciproque**

Édition : 28 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir calculer le carré d'un nombre, utiliser la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice, et reconnaître un angle droit sur une figure. Règle graduée et équerre sont nécessaires.

Repères et ordre de travail

Les codes désignent les capacités du chapitre, pas des codes officiels.

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Reconnaître la configuration et nommer les côtés	§1	3 él. 2
C2 – Calculer l'hypoténuse	§2	4 él. 3
C8 – Calculer un côté de l'angle droit	§3	4 él. 4
C9 – Réduire une distance en pente à l'horizontale	§4	5 él. 4
C3 – La réciproque : prouver qu'un angle est droit	§5 et §6	6 él. 5
C11 – Raisonner par l'absurde : le contrôle d'équerrage	§7	8 él. 7
C4 – Les triplets pythagoriciens et la règle du 3-4-5	§8	9 él. 9
C6 – Infirmer une affirmation : le contre-exemple	§9	10 él. 10
C10 – Raisonner par disjonction des cas	§10	10 él. 11
Pour aller plus loin – La distance entre deux points d'un repère	§11	11 él. 12
C5 – Pythagore dans l'espace : la diagonale d'un pavé	§12	12 él. 13
C7 – Chercher des triplets au tableur	§13	13 él. 14

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

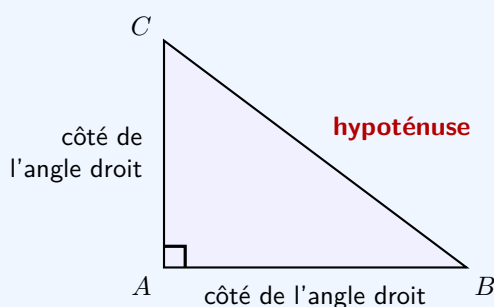
Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Les parties se lisent dans l'ordre. Les §7, §9 et §10 travaillent le **raisonnement**, que le programme rattache nommément à ce chapitre : ils comptent autant que les calculs. Les encadrés et la partie « Pour aller plus loin » dépassent le programme de Seconde : ils ne sont pas évalués.

1 Reconnaître la configuration (C1)

Tout le chapitre repose sur une seule figure : le triangle rectangle. Encore faut-il y lire les bons côtés, car les trois n'ont pas le même rôle.

Définition — Hypoténuse et côtés de l'angle droit



Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté *opposé* à l'angle droit. Les deux autres sont les **côtés de l'angle droit**.

Méthode — Trois façons de la repérer, à connaître

- a) Elle est le côté qui **ne touche pas** le petit carré de l'angle droit.
- b) Elle est **toujours le plus grand** des trois côtés.
- c) Dans « rectangle en A », l'hypoténuse est le côté dont le nom **ne contient pas** la lettre A : ici $[BC]$.

Erreur fréquente — « Le côté du bas », « celui qui est penché »

La position sur la feuille ne décide de rien. Un triangle rectangle dessiné de travers a toujours son hypoténuse en face de l'angle droit, qu'elle soit horizontale, verticale ou oblique. Cherchez le petit carré, pas l'orientation.

Application 1 – Lire trois figures

- a. Un triangle RST est rectangle en S . Quel côté est l'hypoténuse ?
- b. Un triangle a pour côtés 9 cm, 12 cm et 15 cm, et il est rectangle. Lequel est l'hypoténuse, et pourquoi ?
- c. Un charpentier dit : « l'hypoténuse, c'est toujours le côté du bas ». Répondre.

Correction — Application 1

- a. L'angle droit est en S , donc l'hypoténuse est le côté qui ne contient pas la lettre S : c'est $[RT]$.
- b. 15 cm : l'hypoténuse est toujours le plus grand des trois côtés.
- c. Il a tort. L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, où qu'il se trouve sur le dessin. Si l'on fait pivoter la figure d'un quart de tour, l'hypoténuse change de place sur la feuille mais reste le même côté du triangle.

2 Calculer l'hypoténuse (C2)

Théorème — Théorème de Pythagore

Si un triangle ABC est rectangle en A , alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Méthode — Trouver l'hypoténuse en trois lignes

- Repérer l'angle droit, nommer l'hypoténuse, écrire l'égalité.
- Remplacer les deux côtés connus par leurs valeurs, et calculer la somme des carrés.
- Prendre la racine carrée du résultat, à la calculatrice.

Exemple — La longueur d'un chevron

Un chevron repose sur une portée de 4,50 m et monte de 1,80 m. Ces deux longueurs sont les côtés de l'angle droit ; le chevron est l'hypoténuse.

$$L^2 = 4,50^2 + 1,80^2 = 20,25 + 3,24 = 23,49$$

$$L = \sqrt{23,49} \approx 4,85 \text{ m}$$

On commande donc des chevrons de 5 m, qu'on recoupe.

Erreur fréquente — Additionner les longueurs au lieu des carrés

$4,50 + 1,80 = 6,30$ n'est pas la réponse. Le théorème porte sur les **carrés**, pas sur les longueurs. Contrôle de bon sens, à faire à chaque fois : l'hypoténuse est *plus grande* que chacun des deux côtés, mais *plus petite* que leur somme. Ici 4,85 est bien entre 4,50 et 6,30.

Application 2 – Deux longueurs à commander

- Un triangle est rectangle en A , avec $AB = 6$ m et $AC = 8$ m. Calculer BC .
- Un hauban part du sommet d'un mât de 12 m et s'ancre au sol à 5 m du pied. Calculer sa longueur.
- Vérifier chacune des deux réponses par le contrôle de bon sens.

Correction — Application 2

- $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, donc $BC = \sqrt{100} = 10$ m.
- Le mât et le sol forment l'angle droit, le hauban est l'hypoténuse : $L^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, donc $L = \sqrt{169} = 13$ m.
- Au a., 10 est entre 8 et $6 + 8 = 14$. ✓ Au b., 13 est entre 12 et $12 + 5 = 17$. ✓

3 Calculer un côté de l'angle droit (C8)

Le même théorème sert dans l'autre sens : quand c'est l'hypoténuse qu'on connaît, on **soustrait** au lieu d'additionner.

Proposition — Retrouver un côté de l'angle droit

Dans un triangle rectangle en A :

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

On part toujours du carré de l'**hypoténuse**, et on lui retire le carré du côté connu.

Exemple — Jusqu'où monte une échelle ?

Une échelle de 6 m est posée contre un mur, le pied à 1,80 m du mur. L'échelle est l'hypoténuse ; la hauteur atteinte est un côté de l'angle droit.

$$h^2 = 6^2 - 1,80^2 = 36 - 3,24 = 32,76$$

$$h = \sqrt{32,76} \approx 5,72 \text{ m}$$

Erreur fréquente — Soustraire dans le mauvais sens

Écrire $1,80^2 - 6^2 = -32,76$ donne un nombre négatif : aucune longueur n'a un carré négatif. Si cela vous arrive, c'est que vous n'êtes pas parti de l'hypoténuse. Rappel : elle est **le plus grand** des trois côtés, donc son carré est le plus grand aussi.

Application 3 – Deux hauteurs

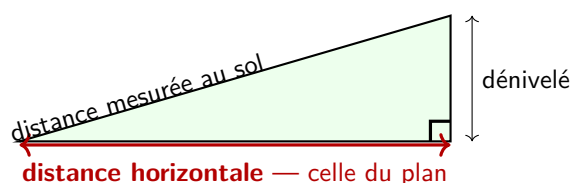
- Un triangle est rectangle en A , avec $BC = 17$ cm et $AC = 8$ cm. Calculer AB .
- Une rampe de 5 m de long couvre 4,80 m au sol. De combien monte-t-elle ?
- Un élève écrit $h^2 = 4,80^2 - 5^2$. Sans calculer, dire pourquoi c'est faux.

Correction — Application 3

- $AB^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, donc $AB = \sqrt{225} = 15$ cm.
- La rampe est l'hypoténuse : $h^2 = 5^2 - 4,80^2 = 25 - 23,04 = 1,96$, donc $h = \sqrt{1,96} = 1,40$ m.
- Il a retiré le carré de l'hypoténuse à celui d'un côté. Le résultat serait négatif, et un carré ne l'est jamais. Il fallait partir de 5^2 , le plus grand.

4 Réduire une distance en pente à l'horizontale (C9)**Définition — Un plan est une vue de dessus**

Sur un plan de masse ou un cadastre, les distances sont mesurées **à l'horizontale**, comme si l'on regardait le terrain depuis le ciel. Or sur un terrain en pente, le décamètre suit le sol : il mesure plus long. On ne reporte donc **jamais** sur un plan la distance mesurée le long du terrain sans l'avoir corrigée.

**Exemple — Un relevé en pente**

Un géomètre mesure 25 m le long d'un talus qui descend de 7 m. Quelle longueur reporte-t-il sur le plan ? La distance mesurée est l'**hypoténuse**, le dénivelé un côté de l'angle droit :

$$d^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \quad d = \sqrt{576} = 24 \text{ m}$$

Il reporte 24 m, et non 25. L'écart d'un mètre paraît petit ; sur une limite de propriété, il ne l'est pas.

Remarque — Le même calcul, l'autre sens

Si l'on connaît la distance du plan et le dénivelé, on retrouve la longueur à parcourir sur le terrain : $25 = \sqrt{24^2 + 7^2}$. C'est utile pour commander un grillage, qui, lui, suivra le sol.

Application 4 – Du terrain au plan

- Une mesure de 13 m est prise sur une pente qui descend de 5 m. Quelle distance figure sur le plan ?
- Sur le plan, deux bornes sont distantes de 40 m. Le terrain monte de 9 m entre elles. Quelle longueur de clôture faut-il commander ?
- Expliquer en une phrase pourquoi les deux réponses ne sont pas les mêmes grandeurs.

Correction — Application 4

- $d^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc $d = 12$ m sur le plan.
- $L^2 = 40^2 + 9^2 = 1\,600 + 81 = 1\,681$, donc $L = \sqrt{1\,681} = 41$ m de clôture.
- Au a. on *réduit* une mesure de terrain à l'horizontale : on cherche un côté de l'angle droit, donc on soustrait. Au b. on part du plan pour retrouver la longueur au sol : on cherche l'hypoténuse, donc on additionne.

5 La réciproque : prouver qu'un angle est droit (C3)

Jusqu'ici on *savait* que le triangle était rectangle et l'on cherchait une longueur. La réciproque fait l'inverse : on connaît les trois longueurs, et on veut **prouver** l'angle droit.

Théorème — Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est **rectangle**, et l'angle droit est opposé au plus grand côté.

Méthode — La rédaction, toujours la même

- Repérer le **plus grand** côté et calculer son carré, à *part*.
- Calculer la somme des carrés des deux autres, à *part*.
- Comparer** les deux nombres, puis conclure par une phrase.

Les deux calculs se mènent séparément : on ne doit pas écrire l'égalité avant de l'avoir vérifiée, sinon on suppose ce qu'on cherche à démontrer.

Exemple — Un triangle 6 – 8 – 10

Le plus grand côté mesure 10 cm.

$$10^2 = 100 \quad \text{et} \quad 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Les deux résultats sont **égaux**, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle, et l'angle droit est opposé au côté de 10 cm.

Exemple — Un triangle 6 – 7 – 9

$$9^2 = 81 \quad \text{et} \quad 6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$$

$81 \neq 85$: le triangle n'est **pas** rectangle. La conclusion est aussi ferme que la précédente — on n'écrit pas « il est presque rectangle ».

Erreur fréquente — Écrire l'égalité avant de l'avoir vérifiée

Commencer par « $9^2 = 6^2 + 7^2$ » revient à affirmer ce qu'on veut prouver. Il faut deux calculs *séparés*, puis une comparaison. C'est la seule rédaction qui démontre quelque chose.

Application 5 – Trois triangles à trancher

Pour chacun, dire s'il est rectangle, en rédigeant les deux calculs séparément.

- a. 5 cm, 12 cm, 13 cm.
- b. 4 cm, 5 cm, 6 cm.
- c. 9 cm, 12 cm, 15 cm.

Correction — Application 5

- a. $13^2 = 169$ et $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Égaux : le triangle **est** rectangle, l'angle droit est opposé au côté de 13 cm.
- b. $6^2 = 36$ et $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. $36 \neq 41$: il n'est **pas** rectangle.
- c. $15^2 = 225$ et $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Égaux : il **est** rectangle. (C'est le triplet 3-4-5 multiplié par 3.)

6 Direct et réciproque : deux énoncés qu'on ne confond pas (C3)

Le théorème et sa réciproque s'écrivent tous deux « si... alors... », mais ils ne partent pas du même endroit et ne servent pas à la même chose.

Proposition — Les deux sens, côte à côte

Le théorème	La réciproque
Si le triangle est rectangle alors $c^2 = a^2 + b^2$ Je <i>sais</i> que l'angle est droit. Je <i>cherche</i> une longueur.	Si $c^2 = a^2 + b^2$ alors le triangle est rectangle Je <i>sais</i> les trois longueurs. Je <i>cherche</i> à prouver l'angle droit.

La réciproque d'un énoncé « si A alors B », c'est l'énoncé « si B alors A » : on a **échangé** l'hypothèse et la conclusion.

Remarque — Une réciproque n'est pas toujours vraie

Ici, le théorème et sa réciproque sont tous deux vrais — c'est ce qui rend Pythagore si commode. Mais ce n'est pas automatique. « Si un nombre se termine par 0, alors il est pair » est vrai ; sa réciproque, « si un nombre est pair, alors il se termine par 0 », est fausse : 14 suffit à le montrer. On y revient au §9.

Application 6 – Lequel des deux ?

Pour chaque situation, dire si l'on utilise le théorème ou sa réciproque, puis répondre.

- a. Une porte rectangulaire mesure 0,90 m sur 2,00 m. Quelle est la longueur de sa diagonale ?
- b. Un menuisier mesure les trois côtés d'un gabarit : 20 cm, 21 cm, 29 cm. Le coin est-il d'équerre ?
- c. Écrire la réciproque de : « si je pose l'équerre, alors l'angle est droit ». Est-elle vraie ?

Correction — Application 6

- a. Le **théorème** : on sait que c'est un rectangle, donc l'angle est droit, et l'on cherche une longueur. $d^2 = 0,90^2 + 2^2 = 0,81 + 4 = 4,81$, donc $d = \sqrt{4,81} \approx 2,19$ m.
- b. La **réciproque** : on a les trois longueurs et on cherche l'angle droit. $29^2 = 841$ et $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$. Égaux : le coin **est** d'équerre.
- c. La réciproque est : « si l'angle est droit, alors je pose l'équerre ». Elle est **fausse** — ou en tout cas ce n'est pas une conséquence : un angle peut être droit sans que personne y pose une équerre. Échanger hypothèse et conclusion ne conserve pas la vérité.

7 Raisonner par l'absurde : le contrôle d'équerrage (C11)

Vous faites déjà ce raisonnement à chaque contrôle de diagonale. Il porte un nom, et le programme demande de le connaître.

Exemple — Un panneau qui n'est pas d'équerre

Un panneau devrait mesurer 90 cm sur 120 cm. Le menuisier mesure sa diagonale : 152 cm.

Supposons que le panneau soit d'équerre. Alors, d'après le théorème de Pythagore, sa diagonale vaudrait

$$\sqrt{90^2 + 120^2} = \sqrt{8\,100 + 14\,400} = \sqrt{22\,500} = 150 \text{ cm}$$

Or elle mesure 152 cm : c'est impossible. **Donc** le panneau n'est pas d'équerre.

Définition — Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, on la **suppose vraie**. On en tire une conséquence. Si cette conséquence contredit un fait connu, l'affirmation ne pouvait pas être vraie : elle est donc fausse. C'est un raisonnement **par l'absurde**.

Méthode — Rédiger en trois temps

- Supposons que** ... (on écrit ce qu'on veut réfuter).
- Alors**, d'après le théorème de Pythagore, ... (on calcule la conséquence).
- Or** ... (le fait mesuré) : c'est impossible. **Donc** ... (la conclusion inverse de la supposition).

Remarque — Pourquoi c'est le raisonnement du chantier

On ne peut pas mesurer un angle droit directement avec assez de précision. On mesure donc une *conséquence* — la diagonale — et, si elle ne tombe pas juste, on en conclut que l'angle ne l'est pas. Tout le contrôle d'équerrage repose là-dessus.

Pour aller plus loin — La contraposée

Hors programme de Seconde, non évalué. Le même raisonnement s'écrit aussi : « **si** le panneau est rectangle, **alors** la diagonale vaut 150 cm ; or elle ne vaut pas 150 cm, donc le panneau n'est pas rectangle ». D'un énoncé « si A alors B », on déduit « si *non* B alors *non* A » : c'est la **contraposée**. Elle est toujours vraie quand l'énoncé de départ l'est. Ne pas la confondre avec la réciproque, « si B alors A », qui peut être fausse.

Application 7 – Le raisonnement du contrôleur

Un plateau devrait mesurer 60 cm sur 80 cm.

- Quelle serait sa diagonale s'il était bien rectangulaire ?
- Le contrôleur mesure 100 cm. Que conclut-il ?
- Sur un second plateau, il mesure 103 cm. Rédiger la conclusion par l'absurde, en trois temps, sur le modèle du cours.

Correction — Application 7

- $\sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = \sqrt{10\,000} = 100 \text{ cm}.$
- La diagonale mesurée est exactement celle attendue : rien ne permet de dire que le plateau n'est pas d'équerre. (*C'est la réciproque du théorème qui permet alors de l'affirmer.*)
- Supposons que le plateau soit d'équerre. Alors, d'après le théorème de Pythagore, sa diagonale vaudrait 100 cm. Or elle mesure 103 cm : c'est impossible. Donc le plateau n'est pas d'équerre.

8 Les triplets pythagoriciens et la règle du 3-4-5 (C4)

Définition — Triplet pythagorien

Trois nombres entiers (a, b, c) forment un **triplet pythagorien** lorsque $a^2 + b^2 = c^2$. Un triangle dont les côtés sont ces trois entiers est donc rectangle, et tous les calculs y tombent juste.

À retenir

Les triplets à reconnaître.

$$3 - 4 - 5 \quad 5 - 12 - 13 \quad 8 - 15 - 17$$

Et tous leurs multiples : 6-8-10, 9-12-15, 30-40-50 sont des triplets, parce que multiplier les trois côtés par un même nombre ne change pas les angles.

Proposition — Pourquoi les multiples marchent

Si $a^2 + b^2 = c^2$, alors pour tout nombre k :

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$$

Agrandir un triangle rectangle le laisse rectangle.

Exemple — La règle du 3-4-5 sur le chantier

Pour implanter un angle droit sans équerre, on tend une corde : 3 m sur un mur, 4 m sur l'autre, et l'on ajuste jusqu'à ce que la diagonale mesure exactement 5 m. L'angle est alors droit, par la *réci-proque* du théorème.

Sur un grand ouvrage on emploie un multiple, pour gagner en précision : 6 m, 8 m, 10 m, ou même 9 m, 12 m, 15 m. Plus les longueurs sont grandes, moins l'erreur de mesure pèse sur l'angle.

Erreur fréquente — Trois entiers ne suffisent pas

5, 6 et 7 sont trois entiers, et même trois entiers consécutifs. Pourtant $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ alors que $7^2 = 49$: ce n'est pas un triplet. Connaître trois nombres entiers ne dit rien ; il faut vérifier l'égalité.

Application 8 – Reconnaître et employer

- Parmi (9, 12, 15), (7, 8, 11) et (10, 24, 26), lesquels sont des triplets pythagoriciens ? Justifier.
- Un maçon dispose d'un cordeau de 12 m. Quelles trois longueurs peut-il marquer dessus pour implanter un angle droit ?
- Pourquoi vaut-il mieux employer 6-8-10 que 3-4-5 sur un grand ouvrage ?

Correction — Application 8

- (9, 12, 15) : $81 + 144 = 225 = 15^2$, **oui** — c'est 3-4-5 multiplié par 3. (7, 8, 11) : $49 + 64 = 113$ alors que $11^2 = 121$, **non**. (10, 24, 26) : $100 + 576 = 676 = 26^2$, **oui** — c'est 5-12-13 multiplié par 2.
- $3 + 4 + 5 = 12$: il marque 3 m, puis 4 m, puis 5 m, et referme le triangle avec le cordeau entier.
- Parce qu'une erreur de mesure de 1 cm pèse deux fois moins sur un côté de 6 m que sur un côté de 3 m. Plus les longueurs sont grandes, plus l'angle obtenu est précis.

9 Infirmer une affirmation : le contre-exemple (C6)

Le programme demande de travailler les raisonnements logiques à l'occasion de Pythagore. Après l'absurde (§7), voici le plus utile : pour démolir une affirmation générale, un seul cas suffit.

Définition — Contre-exemple

Une affirmation qui commence par « tout... », « toujours », « n'importe quel... » est **universelle** : elle prétend valoir dans tous les cas. Pour la réfuter, il suffit d'en exhiber **un seul** qui ne marche pas. Ce cas s'appelle un **contre-exemple**.

Exemple — « Trois entiers consécutifs forment un triplet »

Un élève affirme : « tout triangle dont les côtés sont trois entiers consécutifs est rectangle ». Il s'appuie sur 3-4-5, qui marche en effet.

On prend 2, 3, 4 : $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, alors que $4^2 = 16$. Comme $13 \neq 16$, ce triangle n'est pas rectangle. L'affirmation est donc **fausse**, et ce seul cas suffit à le dire.

Méthode — Rédiger un contre-exemple

- Annoncer le cas choisi, avec ses nombres.
- Faire le calcul qui montre qu'il ne marche pas.
- Conclure : « donc l'affirmation est fausse ».

Un contre-exemple ne s'explique pas, il se montre. Un seul calcul, et c'est réglé.

Erreur fréquente — Un exemple qui marche ne démontre rien

Trouver que 3-4-5 fonctionne ne prouve pas que tous les entiers consécutifs fonctionnent. Un exemple ne *confirme* pas une affirmation universelle ; un contre-exemple, lui, la *réfute* définitivement. Les deux ne pèsent pas le même poids.

Application 9 – Trois affirmations à réfuter

Pour chacune, donner un contre-exemple et conclure.

- « Si les trois côtés d'un triangle sont des nombres entiers, il est rectangle. »
- « Tout triangle dont un côté mesure 5 cm et un autre 12 cm est rectangle. »
- « Si un nombre est pair, alors il se termine par 0. »

Correction — Application 9

- Prenons 2, 3, 4 : $4 + 9 = 13$ et $4^2 = 16$, donc $13 \neq 16$. Ce triangle n'est pas rectangle. L'affirmation est fausse.
- Prenons un triangle de côtés 5, 12 et 14 : $25 + 144 = 169$ et $14^2 = 196$, donc $169 \neq 196$. Il n'est pas rectangle. L'affirmation est fausse. (*Elle n'est vraie que si le troisième côté vaut exactement 13.*)
- 14 est pair et ne se termine pas par 0. L'affirmation est fausse. (*C'est l'exemple du §6 : la réciproque d'un énoncé vrai peut être fausse.*)

10 Quand l'énoncé ne dit pas quel côté est l'hypoténuse (C10)

Troisième raisonnement du programme : la **disjonction des cas**. Il sert dès qu'une situation laisse plusieurs cas possibles : au lieu de choisir au hasard, on les **examine tous**.

Exemple — Deux côtés, deux réponses

« Un triangle rectangle a deux côtés qui mesurent 6 cm et 10 cm. Combien mesure le troisième ? »
 Rien ne dit lequel est l'hypoténuse. Il faut donc examiner les cas.

Cas 1 — le côté de 10 cm est l'hypoténuse. Alors le troisième côté est un côté de l'angle droit :

$$x^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \quad x = 8 \text{ cm}$$

Cas 2 — les deux côtés donnés encadrent l'angle droit. Alors le troisième est l'hypoténuse :

$$x^2 = 10^2 + 6^2 = 100 + 36 = 136 \quad x = \sqrt{136} \approx 11,66 \text{ cm}$$

Cas 3 — le côté de 6 cm est l'hypoténuse. Impossible : l'hypoténuse est le plus grand côté, et 6 cm ne l'est pas.

Il y a donc **deux** réponses possibles : 8 cm ou environ 11,66 cm.

Définition — Disjonction des cas

Raisonnement par **disjonction des cas**, c'est découper la situation en toutes les possibilités, les traiter une par une, et écarter celles qui sont impossibles. Le raisonnement n'est complet que si l'on a montré qu'il n'en reste aucune autre.

Erreur fréquente — S'arrêter au premier cas

Beaucoup répondent 8 cm et s'arrêtent. C'est une réponse, ce n'est pas *la* réponse : l'énoncé en admet deux. Tant que l'hypoténuse n'est pas nommée, il faut les deux — et il faut dire pourquoi le troisième cas est écarté.

Application 10 – Examiner tous les cas

- Un triangle rectangle a deux côtés de 5 cm et 13 cm. Donner toutes les valeurs possibles du troisième côté.
- Pour chaque cas, dire s'il est possible et pourquoi.
- Que faudrait-il ajouter à l'énoncé pour qu'il n'y ait plus qu'une réponse ?

Correction — Application 10

a. et b. Trois cas à examiner.

Cas 1 — 13 est l'hypoténuse. $x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc $x = 12$ cm. Possible. (C'est le triplet 5-12-13.)

Cas 2 — 5 et 13 encadrent l'angle droit. $x^2 = 13^2 + 5^2 = 169 + 25 = 194$, donc $x = \sqrt{194} \approx 13,93$ cm. Possible.

Cas 3 — 5 est l'hypoténuse. Impossible : l'hypoténuse est le plus grand côté, or $5 < 13$.
 Deux réponses : 12 cm ou environ 13,93 cm.

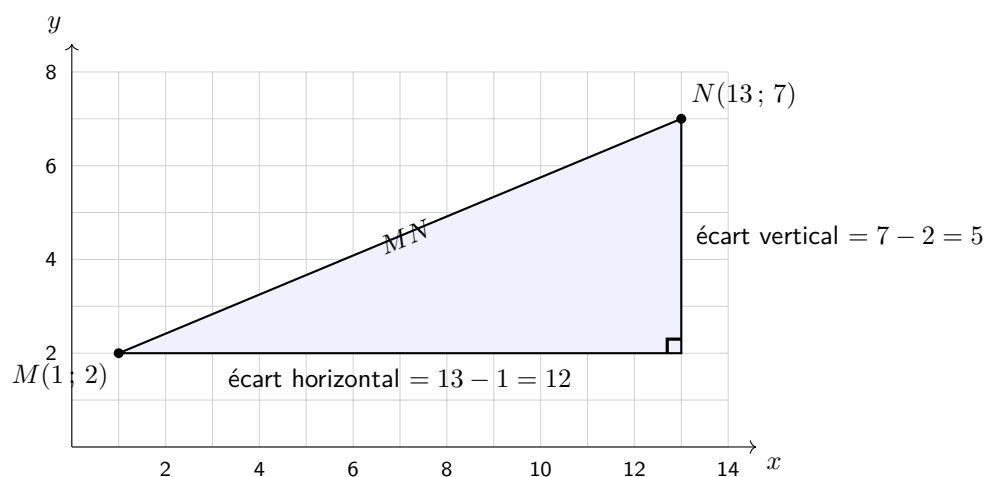
c. Il suffirait de nommer l'hypoténuse — par exemple « rectangle en A, avec $BC = 13$ cm » — ou de préciser que les deux côtés donnés forment l'angle droit.

11 Pour aller plus loin : la distance entre deux points d'un repère

Cette partie dépasse le programme de Seconde : elle n'est pas évaluée. Un carnet de levé donne des points par leurs coordonnées. Pour connaître la distance entre deux d'entre eux, on retrouve un triangle rectangle sans même le tracer.

Méthode — La distance entre deux points

- Calculer l'**écart horizontal** : la différence des abscisses.
- Calculer l'**écart vertical** : la différence des ordonnées.
- Ces deux écarts sont les côtés de l'angle droit ; la distance cherchée est l'hypoténuse.

**Exemple — Deux bornes d'un levé**

Pour $M(1; 2)$ et $N(13; 7)$:

$$MN^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \quad MN = \sqrt{169} = 13$$

On retrouve le triplet 5-12-13.

Erreur fréquente — Un écart négatif n'est pas un problème

Si l'on calcule l'écart dans l'autre sens, $1 - 13 = -12$. Ce n'est pas grave : $(-12)^2 = 144$, le même nombre. Le carré efface le signe. En revanche, une *longueur* n'est jamais négative : la réponse finale est toujours positive.

Application 11 – Deux distances sur un levé (pour aller plus loin)

- Calculer la distance entre $A(2; 1)$ et $B(10; 7)$.
- Calculer la distance entre $C(-3; 2)$ et $D(2; -1)$, arrondie au dixième.
- Au b., un élève écrit un écart de -5 . Cela change-t-il le résultat ?

Correction — Application 11

- Écarts : $10 - 2 = 8$ et $7 - 1 = 6$. $AB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, donc $AB = 10$. (Le triplet 3-4-5 doublé.)
- Écarts : $2 - (-3) = 5$ et $-1 - 2 = -3$. $CD^2 = 5^2 + (-3)^2 = 25 + 9 = 34$, donc $CD = \sqrt{34} \approx 5,8$.
- Non : $(-5)^2 = 25$, exactement comme 5^2 . Le carré supprime le signe, donc le sens dans lequel on soustrait n'a aucune importance.

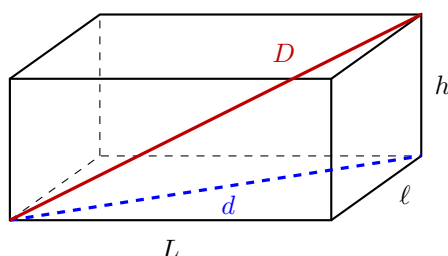
12 Pythagore dans l'espace : la diagonale d'un pavé (C5)

Quand la longueur cherchée traverse un solide, on applique le théorème **deux fois** : d'abord à plat dans le fond, puis dans le plan vertical.

Méthode — La grande diagonale d'un pavé droit

Pour un pavé de dimensions L , ℓ et h :

- Dans le fond, rectangle $L \times \ell$: $d^2 = L^2 + \ell^2$.
- Cette diagonale d , la hauteur h et la grande diagonale D forment un triangle rectangle : $D^2 = d^2 + h^2$.
- En remplaçant : $D^2 = L^2 + \ell^2 + h^2$.

**Exemple — Un coffre d'outillage**

Un coffre mesure 90 cm sur 60 cm, et 20 cm de haut.

$$d^2 = 90^2 + 60^2 = 8\,100 + 3\,600 = 11\,700$$

$$D^2 = 11\,700 + 20^2 = 11\,700 + 400 = 12\,100 \quad D = \sqrt{12\,100} = 110 \text{ cm}$$

Un niveau à bulle de 110 cm entre tout juste, posé en diagonale ; un niveau de 120 cm ne rentre pas.

Remarque — À quoi ça sert

La grande diagonale est la **plus grande longueur** d'un objet rigide qui peut entrer dans le pavé : un carton, une tringle, une gaine technique, un panneau. C'est la question qu'on se pose devant un coffre de camion ou une trémie.

Application 12 – Ce qui rentre, ce qui ne rentre pas

Une caisse mesure 2 m sur 1 m, et 2 m de haut.

- Calculer la diagonale du fond.
- En déduire la grande diagonale, arrondie au centimètre.
- Un tube rigide de 3 m entre-t-il dans la caisse ?

Correction — Application 12

- $d^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$, donc $d = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ m}$.
- $D^2 = 5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$, donc $D = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$ exactement. (On garde $d^2 = 5$ et non sa valeur arrondie : c'est plus sûr et plus rapide.)
- Tout juste : la grande diagonale mesure exactement 3 m. En pratique le tube ne passera pas, car il faudrait le glisser en biais sans aucun jeu. Il faut donc répondre **non**, en expliquant pourquoi.

13 Chercher des triplets au tableur (C7)

Le programme demande de « chercher les triplets pythagoriciens jusqu'à 1 000 ». À la main, c'est interminable ; au tableur, c'est une formule écrite une fois.

Méthode — Le test, écrit une seule fois

Trois colonnes pour a , b et c , puis une quatrième qui répond :

$=SI(A2^2+B2^2=C2^2;"oui";"non")$

^{2} se lit « au carré », et $SI(condition;...;...)$ affiche le premier texte si la condition est vraie, le second sinon. On écrit la formule en D2, puis on la recopie vers le bas : les références suivent la ligne toutes seules.

Exemple — Cinq relevés contrôlés d'un coup

	A — a	B — b	C — c	D
2	3	4	5	oui
3	5	12	13	oui
4	2	3	4	non
5	8	15	17	oui
6	6	7	9	non

Le test est décrit une fois ; la machine l'applique ligne après ligne, sans se tromper et sans fatigue.

Remarque — Chercher, et non reconnaître

La liste du §8 donne les triplets qu'on a *appris*. Le tableur, lui, les **cherche** : on essaie toutes les valeurs et on garde celles qui tombent juste. C'est ainsi qu'on trouve 7 – 24 – 25, qui n'est dans aucune liste du cours.

Erreur fréquente — Écrire $=A2*2$ au lieu de $=A2^2$

$A2*2$ est le *double*, $A2^2$ est le *carré*. Avec le double, la ligne 3-4-5 afficherait « non », puisque $6 + 8 = 14$ et non 10. Contrôlez toujours une ligne dont vous connaissez la réponse.

Application 13 – Lire et compléter la feuille

- Que faut-il écrire en D4 ? Comment l'obtenir sans le taper ?
- On ajoute la ligne $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Qu'affichera la colonne D ? Justifier par le calcul.
- On veut chercher tous les triplets dont l'hypoténuse vaut 25. Comment remplir les colonnes ?

Correction — Application 13

- $=SI(A4^2+B4^2=C4^2;"oui";"non")$. On l'obtient en **recopiant** D2 vers le bas : les références passent de A2 à A3 puis A4 toutes seules.
- oui** : $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ et $15^2 = 225$. C'est le triplet 3-4-5 multiplié par 3.
- On écrit 25 dans toute la colonne C, on fait varier a dans la colonne A — 1, 2, 3, et ainsi de suite — et on calcule b en colonne B avec $=RACINE(C2^2-A2^2)$. Les lignes où b tombe sur un entier donnent les triplets : on trouve 7 – 24 – 25 et 15 – 20 – 25.

Bilan – Je sais faire

- L'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit, et toujours le plus grand.
- **Théorème** : je sais que c'est rectangle, je cherche une longueur. J'additionne les carrés pour l'hypoténuse, je soustrais pour un côté de l'angle droit.
- **Réciproque** : je connais les trois longueurs, je prouve l'angle droit. Deux calculs *séparés*, puis une comparaison.
- **Par l'absurde** : « supposons que l'ouvrage soit d'équerre ; alors sa diagonale vaudrait... ; or elle mesure

autre chose ; donc il n'est pas d'équerre ». C'est le raisonnement de tout contrôle d'équerrage.

- Un **contre-exemple** suffit à réfuter un « tout... est... ». Un exemple qui marche, lui, ne démontre rien.
- Quand l'énoncé ne dit pas quel côté est l'hypoténuse, on fait une **disjonction des cas** : on les examine tous, et on écarte les impossibles.
- Triplets à connaître : 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17, et tous leurs multiples.
- Sur un plan, les distances sont **horizontales** : une mesure prise en pente se réduit avant d'être reportée.
- Dans l'espace, on applique le théorème **deux fois** : $D = \sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}$.