

Fiche de cours — Fonction carré et variations

Tout le cours en deux pages, recto-verso. À garder sous les yeux pendant les exercices et à relire avant l'évaluation.

1. La fonction carré

$$f(x) = x^2 = x \times x, \text{ pour tout réel } x$$

Un carré est **toujours positif ou nul** : $x^2 \geq 0$, et $x^2 = 0$ seulement pour $x = 0$.

Erreur fréquente

$(-3)^2 = +9$ (les parenthèses : c'est -3 qu'on élève au carré).
 $-3^2 = -9$ (sans parenthèses : on élève 3, puis on prend l'opposé).

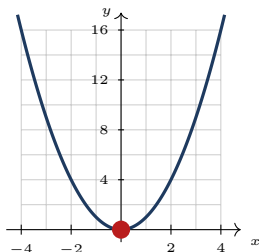
2. Symétrie

$$f(-x) = f(x)$$

Deux nombres **opposés** ont la même image : $f(3) = f(-3) = 9$. La moitié d'un tableau de valeurs se remplit donc sans calcul.

Sur la courbe : si $M(a; b)$ est sur la parabole, $M'(-a; b)$ y est aussi.

3. La parabole



Sommet $S(0; 0)$; symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

Méthode — tracer

1. Des valeurs de x **symétriques**. 2. Calculer les images. 3. Placer les points. 4. Relier à **main levée** : aucun segment droit.

4. Variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	

Décroissante sur $] -\infty ; 0]$, **croissante** sur $[0 ; +\infty[$. **Minimum** 0 en $x = 0$. Pas de maximum.

Comparer sans calculer

Deux positifs : l'ordre est **conservé** ($3 < 4$ donc $9 < 16$).
 Deux négatifs : l'ordre est **inversé** ($-11 < -4$ donc $121 > 16$).
 Signes contraires : remplacer le négatif par son opposé, puis comparer.

En une phrase : **plus un nombre est loin de zéro, plus son carré est grand.**

5. Agrandir : $\times n$ devient $\times n^2$

$$(n \times x)^2 = n^2 \times x^2$$

Côté $\times 2 \Rightarrow$ aire $\times 4$. Côté $\times 3 \Rightarrow$ aire $\times 9$.

Erreur fréquente

« Deux fois plus grand, deux fois plus cher » : faux pour tout ce qui se facture au mètre carré. Vrai en revanche pour les plinthes, qui suivent le *périmètre*.

6. $g(x) = x^2 + k$

Même parabole, **décalée de k** : vers le haut si $k > 0$, vers le bas si $k < 0$.

Sommet $S(0; k)$: le **minimum devient k** , toujours atteint en $x = 0$. Les variations ne changent pas.

Exemple

$$g(x) = x^2 + 3 : g(0) = 3, g(2) = 7. \text{ Sommet } (0; 3).$$

7. $h(x) = kx^2$

Même sommet $S(0; 0)$, allure différente :

$k > 1$ parabole **resserrée**
 $0 < k < 1$ parabole plus **ouverte**
 $k < 0$ parabole **retournée** : maximum

Beaucoup de grandeurs s'écrivent ainsi : aire d'un carrelage, effet Joule $P = RI^2$, distance de freinage, charge d'une tablette.

8. Résoudre $x^2 = c$

$$c > 0 : x = \sqrt{c} \text{ ou } x = -\sqrt{c}$$

$c = 0$: une solution, $x = 0$. $c < 0$: **aucune** solution.

Méthode — se ramener à $x^2 = c$

1. Faire passer le terme constant. 2. Diviser par le coefficient de x^2 . 3. Conclure, puis vérifier.

Exemple

$$3x^2 = 363 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow \mathcal{S} = \{-11; 11\}.$$

Erreur fréquente

N'écrire qu'une solution. Il y en a **deux**, opposées. Ce n'est qu'*ensuite* que l'on écarte la négative si l'inconnue est une longueur — **en le justifiant**.

9. Résoudre $x^2 < c$ (avec $c > 0$)

$$x^2 \leq c \iff -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}$$

$$x^2 \geq c : x \leq -\sqrt{c} \text{ ou } x \geq \sqrt{c}.$$

Graphiquement : **en dessous** de l'horizontale $y = c$ pour $<$, **au-dessus** pour $>$. La réponse se lit sur l'axe des abscisses.

Erreur fréquente

$x^2 < 9$ ne donne pas $x < 3$: il faut aussi $x > -3$, car $(-5)^2 = 25$. La solution est un intervalle **encadré** : $] -3 ; 3[$.

10. Balayer pour approcher

Essayer des valeurs l'une après l'autre et garder la meilleure : c'est le **balayage**, au tableur ou en Python.

Deux usages

Un extremum : à périmètre fixé, le tableau des aires monte, atteint un maximum, puis redescend — le rectangle optimal est le **carré**.

Une racine carrée : $7^2 = 49 < 50 < 64 = 8^2$ donne $7 < \sqrt{50} < 8$, puis $7,0 < \sqrt{50} < 7,1$ au dixième.

Le balayage **approche**, il ne démontre pas : entre deux essais, il ne regarde pas.

11. Où la reconnaître

Situation	Fonction
aire d'un sol carré	$A(c) = c^2$
coût d'un revêtement	$C(c) = p \times c^2$
nombre de carreaux	n^2 pour n par côté
effet Joule	$P = R I^2$
distance de freinage	$d(v) = \frac{v^2}{150}$
charge d'une tablette	$R(e) = k e^2$
chute libre	$d(t) = 4,9 t^2$

Toutes sont du type $k x^2$: dans chacune, **doubler x multiplie le résultat par 4**.

12. Vérifier ma réponse

Cinq contrôles

1. Une image est **positive ou nulle** : une image négative est une erreur de signe.
2. Une équation $x^2 = c$ avec $c > 0$ a **deux** solutions.
3. Une longueur trouvée est **positive**, et se contrôle en recalculant son carré.
4. La solution de $x^2 < c$ est un intervalle **encadré** par deux nombres opposés.
5. Si le côté a été multiplié par n , l'aire doit l'être par n^2 .

Je sais faire

- ☐ calculer $f(x) = x^2$, y compris pour un nombre négatif ;
- ☐ utiliser $f(-x) = f(x)$ pour compléter sans calculer ;
- ☐ construire un tableau de valeurs et tracer la parabole ;
- ☐ lire et compléter le tableau de variations, donner le minimum ;
- ☐ comparer deux carrés sans les calculer ;
- ☐ dire par combien l'aire est multipliée quand le côté l'est par n ;
- ☐ décrire l'effet de $+k$ et celui de $\times k$ sur la parabole ;
- ☐ résoudre $x^2 = c$, et $k x^2 + b = c$ en isolant x^2 ;
- ☐ résoudre $x^2 < c$ et $x^2 > c$, par le calcul et graphiquement ;
- ☐ écarter une solution négative en justifiant par la situation ;
- ☐ balayer un tableau pour approcher un extremum ou une racine carrée.