

Version professeur

Mathématiques – Seconde Bac Pro**Cours et applications****Chapitre 10****Fonction carré et variations**

Édition : 28 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Rappel de cours — Avant de commencer

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir calculer le carré d'un nombre positif ou négatif, déterminer l'image et un antécédent par une fonction, placer des points dans un repère et résoudre une équation du premier degré. Une calculatrice est autorisée ; règle et crayon sont nécessaires pour les tracés.

Repères et ordre de travail

Les codes désignent les capacités du chapitre, pas des codes officiels.

Capacité et intitulé complet	Partie du cours	Page
C1 – Calculer des images par $f(x) = x^2$, y compris pour les négatifs	§1	3 él. 2
C4 – Utiliser la propriété de symétrie $f(-x) = f(x)$	§2	4 él. 3
C2 – Construire un tableau de valeurs et tracer la parabole	§3	4 él. 4
C3 – Lire et compléter un tableau de variations	§4	6 él. 5
C8 – Comparer deux carrés sans les calculer	§5	6 él. 6
C7 – Multiplier le côté par n multiplie l'aire par n^2	§6	7 él. 7
C6 – Exploiter les transformations $g(x) = x^2 + k$ et $h(x) = kx^2$	§7 et §8	9 él. 9
C5 – Résoudre $x^2 = c$ par le calcul	§9	11 él. 12
C9 – Résoudre graphiquement $x^2 = c$ et $x^2 < c$	§10	12 él. 13
C10 – Exploiter la courbe d'une fonction quelconque : tableau de variations, extremums sur un intervalle, courbe de $f + k$ et variations de kf	§11 et §12	14 él. 15

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

Méthode — Mode d'emploi

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Les parties se lisent dans l'ordre : chacune s'appuie sur la précédente.

1 La fonction carré (C1)

Un agenceur doit poser un revêtement de sol dans une pièce **carrée** de côté c mètres. L'aire à couvrir est $A = c \times c = c^2$. À chaque côté correspond une aire et une seule : c'est une fonction, et c'est la première du programme qui ne soit pas linéaire.

Définition — Fonction carré

La **fonction carré** est la fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = x^2 = x \times x$$

Elle associe à tout nombre son carré. Sa courbe s'appelle une **parabole**.

Méthode — Calculer une image

1. remplacer x par la valeur, **entre parenthèses** si elle est négative ;
2. multiplier le nombre par lui-même ;
3. écrire le résultat avec son unité lorsqu'il y en a une.

Exemple — Cinq images

$$f(4) = 4^2 = 16 \quad f(-4) = (-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16 \quad f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25 \quad f(-2,5) = (-2,5)^2 = 6,25$$

Toutes ces images sont **positives ou nulles** : un produit de deux nombres de même signe est positif.

Proposition — Le carré est toujours positif ou nul

Pour tout nombre réel x : $x^2 \geq 0$.

L'image n'est nulle que pour $x = 0$.

Erreur fréquente — Les parenthèses changent le résultat

Deux écritures voisines, deux résultats opposés :

— $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$: les parenthèses disent que c'est -3 qui est élevé au carré ;

— $-3^2 = -(3^2) = -9$: sans parenthèses, on élève 3 au carré, puis on prend l'opposé.

De même, $-x^2$ signifie $-(x^2)$: l'opposé du carré, jamais le carré de l'opposé.

Application 1 – Calculer des images

a. Pour $f(x) = x^2$, calculer $f(-6)$, $f(0,4)$ et $f(-2,5)$.

b. Corriger les trois calculs suivants et justifier :

$$\ll (-7)^2 = -49 \gg \quad \ll -3^2 = 9 \gg \quad \ll (-2)^2 = -4 \gg$$

Correction — Application 1

a. $f(-6) = (-6) \times (-6) = 36$; $f(0,4) = 0,16$; $f(-2,5) = 6,25$. Les trois images sont positives.

b. $(-7)^2 = +49$: le produit de deux nombres négatifs est positif. $-3^2 = -9$: le signe est *hors* du carré. $(-2)^2 = +4$, pour la même raison qu'au premier.

2 Deux nombres opposés ont la même image (C4)

Proposition — Symétrie

Pour tout nombre réel x : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Deux nombres **opposés** ont donc toujours la même image : $f(3) = f(-3) = 9$, $f(7) = f(-7) = 49$.

Cette propriété fait gagner la moitié des calculs, et elle se lit aussi sur la courbe : la parabole est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** (§3).

Exemple — Le calcul qu'on ne refait pas

Un menuisier a déjà calculé $f(2,5) = 6,25$. Alors $f(-2,5) = 6,25$ sans aucun calcul supplémentaire. Si le point $M(2,5 ; 6,25)$ est sur la parabole, le point $M'(-2,5 ; 6,25)$ y est aussi : on change le signe de l'abscisse, on garde l'ordonnée.

Application 2 – Utiliser la symétrie

Compléter **sans calculer aucun carré**, et dire à chaque fois quelle propriété on utilise.

- $f(6) = 36$, donc $f(-6) = \dots\dots\dots$
- $f(-8) = 64$, donc $f(8) = \dots\dots\dots$
- La parabole passe par $A(3 ; 9)$. Quel autre point peut-on placer aussitôt ?

Correction — Application 2

- $f(-6) = 36$.
 - $f(8) = 64$.
- Dans les deux cas : $f(-x) = f(x)$.
- Le point $A'(-3 ; 9)$, symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.

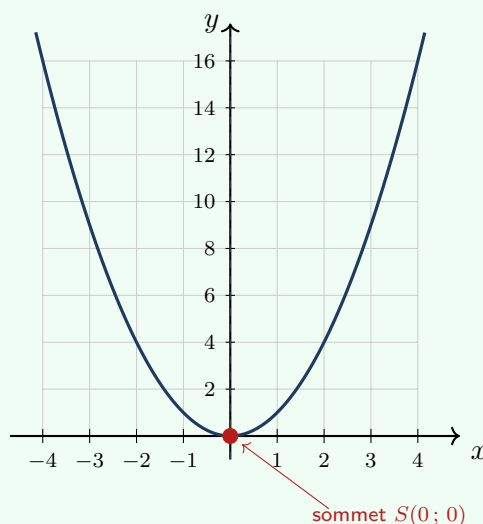
3 Tableau de valeurs et tracé de la parabole (C2)

Méthode — Tracer la parabole

- choisir des valeurs de x **symétriques** : $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$;
- calculer les images ; celles de deux opposés sont égales, la moitié du tableau se remplit sans calcul ;
- placer les points, puis relier **à main levée par une courbe régulière** – jamais à la règle, la parabole n'a aucun segment droit ;
- vérifier que le point le plus bas est $(0 ; 0)$ et que la courbe est symétrique.

Exemple — Tableau de valeurs de $f(x) = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



Lecture de la figure. La courbe bleue est la parabole de $f(x) = x^2$. Les pointillés gris marquent l'axe de symétrie, qui est l'axe des ordonnées : la moitié gauche est l'image de la moitié droite. Le point rouge est le **sommet**, point le plus bas de la courbe.

Définition — Vocabulaire de la parabole

La courbe de $f(x) = x^2$ est une **parabole**.

- elle est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** ;
- son point le plus bas s'appelle le **sommet** : ici $S(0; 0)$;
- elle est entièrement située **au-dessus** de l'axe des abscisses, puisque $x^2 \geq 0$.

Méthode — Lire une image, lire un antécédent

Image de a : repérer a sur l'axe horizontal, monter jusqu'à la courbe, lire l'ordonnée.

Antécédents de b : repérer b sur l'axe vertical, tracer l'horizontale, lire les abscisses des points d'intersection. Il y en a le plus souvent **deux**, opposés.

Application 3 – Lire sur la parabole

En utilisant la parabole tracée ci-dessus :

- a. lire $f(2)$ puis $f(-2)$; que remarque-t-on ?
- b. lire les deux antécédents de 9, puis vérifier par le calcul ;
- c. un élève affirme : « il existe un nombre dont le carré vaut -4 ». Que répondre, en s'appuyant sur la courbe ?

Correction — Application 3

- a. $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$: les deux points sont à la même hauteur, c'est la symétrie du §2.
- b. L'horizontale $y = 9$ coupe la parabole en $x = -3$ et $x = 3$. Vérification : $(-3)^2 = 9$ et $3^2 = 9$.
- c. C'est impossible : toute la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses, donc l'horizontale $y = -4$ ne la rencontre jamais. Aucun carré n'est négatif.

4 Sens de variation et tableau de variations (C3)

Définition — Variations de la fonction carré

- sur $] -\infty ; 0]$, f est **décroissante** : la courbe descend vers le sommet ;
- sur $[0 ; +\infty[$, f est **croissante** : la courbe remonte ;
- f admet un **minimum** égal à 0, atteint en $x = 0$;
- f n'a pas de maximum : la parabole monte sans limite.

Exemple — Tableau de variations de $f(x) = x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

Lecture du tableau. La première flèche **descend** : sur $] -\infty ; 0]$, f est décroissante. La seconde **monte** : sur $[0 ; +\infty[$, f est croissante.

Le nombre écrit au creux, 0, est le **minimum** de la fonction ; l'abscisse où il est atteint, 0 elle aussi, se lit au-dessus, dans la ligne des x . Le tableau et la parabole disent la même chose.

Erreur fréquente — Le minimum n'est pas l'abscisse où il est atteint

Pour $f(x) = x^2$: le minimum vaut **0** et il est atteint **en** $x = 0$. Les deux nombres sont ici égaux, ce qui entretient la confusion – mais dès le §7 ils ne le seront plus : pour $g(x) = x^2 + 3$, le minimum vaut 3 et il est toujours atteint en $x = 0$.

Application 4 – Lire le tableau de variations

Répondre **sans calculer** les carrés, en citant l'intervalle utilisé.

- f est-elle croissante sur $[1 ; 4]$?
- f est-elle croissante sur $[-5 ; -2]$?
- Quel est le minimum de f , et en quelle valeur de x est-il atteint ? f a-t-elle un maximum ?

Correction — Application 4

- Oui : $[1 ; 4]$ est inclus dans $[0 ; +\infty[$, où f est croissante.
- Non, elle y est décroissante : $[-5 ; -2]$ est inclus dans $] -\infty ; 0]$.
- Le minimum vaut 0, atteint en $x = 0$: c'est le nombre écrit au creux du tableau. f n'a pas de maximum : la seconde flèche monte sans limite.

5 Comparer deux carrés sans les calculer (C8)

Le tableau de variations sert à comparer deux images *sans* sortir la calculatrice. Tout tient en une phrase : **plus un nombre est éloigné de zéro, plus son carré est grand.**

Méthode — Trois cas, une seule idée

- deux nombres positifs** : f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, l'ordre est **conservé**. Si $0 \leq a < b$, alors $a^2 < b^2$;
- deux nombres négatifs** : f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$, l'ordre est **inversé**. Si $a < b \leq 0$, alors $a^2 > b^2$;
- deux nombres de signes contraires** : on remplace le négatif par son opposé, qui a le même carré

(§2), puis on compare deux positifs.

Exemple — Les trois cas sur des nombres

$4,1 < 4,6$, tous deux positifs, donc $4,1^2 < 4,6^2$ (en effet $16,81 < 21,16$).
 $-11 < -4$, tous deux négatifs, donc $(-11)^2 > (-4)^2$ (en effet $121 > 16$).
 (-8) et 11 : on écrit $(-8)^2 = 8^2$, puis $8 < 11$ donc $(-8)^2 < 11^2$.

Erreur fréquente — « Plus petit » ne veut pas dire « carré plus petit »

-11 est plus petit que -4 , et pourtant $(-11)^2$ est le plus *grand* des deux carrés. Sur les nombres négatifs, la fonction carré renverse l'ordre : c'est exactement ce que dit la flèche descendante du tableau de variations.

Application 5 – Comparer sans calculer

Comparer, en indiquant à chaque fois l'intervalle et le sens de variation utilisés.

a. $f(3)$ et $f(4)$ b. $f(-2)$ et $f(-5)$ c. $(-9)^2$ et 6^2

Correction — Application 5

- a. $0 \leq 3 < 4$, f croissante sur $[0; +\infty[$: $f(3) < f(4)$ ($9 < 16$).
 b. $-5 < -2 \leq 0$, f décroissante sur $] -\infty; 0]$: $f(-5) > f(-2)$ ($25 > 4$).
 c. $(-9)^2 = 9^2$, et $6 < 9$ donc $6^2 < (-9)^2$ ($36 < 81$).

6 Multiplier le côté par n multiplie l'aire par n^2 (C7)

C'est la propriété la plus utile du chapitre sur un chantier : elle explique pourquoi une pièce « deux fois plus grande » coûte *quatre* fois plus cher à revêtir.

Proposition — Le carré n'est pas proportionnel

Pour tout nombre n et tout nombre x :

$$(n \times x)^2 = n^2 \times x^2$$

Si le côté d'un carré est multiplié par n , son aire est multipliée par n^2 .

Exemple — Trois agrandissements d'une dalle carrée

Le côté est multiplié par...	2	3	1,5
...l'aire est multipliée par	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$1,5^2 = 2,25$

Une dalle de 2 m de côté fait 4 m^2 ; une dalle de 4 m de côté fait 16 m^2 . Le côté a doublé, l'aire a été multipliée par 4 : ce n'est **pas** une situation de proportionnalité.

Erreur fréquente — « Deux fois plus grand » coûte deux fois plus cher

C'est l'erreur de devis la plus courante. Le revêtement se facture au mètre carré : si le côté double, la facture de revêtement est multipliée par 4, pas par 2. En revanche le *périmètre*, lui, double bien – plinthes et joints de rive restent, eux, proportionnels au côté.

Application 6 – Le devis d'un carreleur

Un carreleur facture 38 € le mètre carré posé. Une pièce carrée mesure 3 m de côté.

- a. Calculer l'aire, puis le montant de la pose.
- b. Le client hésite avec une pièce carrée de 6 m de côté. Sans recalculer l'aire, dire par combien le montant est multiplié, puis donner ce montant.
- c. Le client affirme : « le côté double, donc je paie deux fois plus ». Que lui répondre ?

Correction — Application 6

- a. $A = 3^2 = 9 \text{ m}^2$, donc $9 \times 38 = 342 \text{ €}$.
- b. Le côté est multiplié par 2, donc l'aire par $2^2 = 4$: le montant passe à $342 \times 4 = 1368 \text{ €}$.
Contrôle : $6^2 = 36$ et $36 \times 38 = 1368 \text{ €}$.
- c. C'est faux : la pose se paie au mètre carré, et l'aire est multipliée par 4. Il paiera quatre fois plus. Seul ce qui se mesure en mètres – les plinthes, par exemple – doublerait.

7 La transformation $g(x) = x^2 + k$ (C6)

Définition — Déplacement vertical

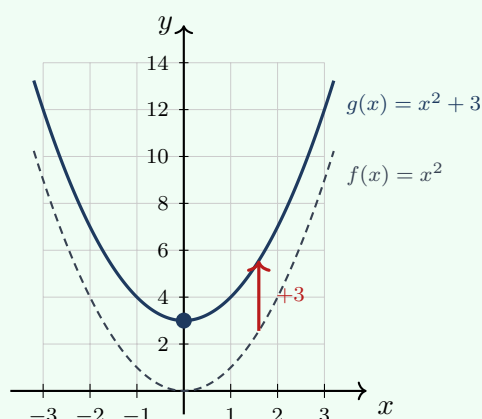
La fonction $g(x) = x^2 + k$, où k est un nombre fixe, a pour courbe **la même parabole** que $f(x) = x^2$, **décalée verticalement de k** .

- $k > 0$: la parabole monte de k ; $k < 0$: elle descend de $|k|$;
- le sommet se déplace en $S(0; k)$: le **minimum devient k** , toujours atteint en $x = 0$;
- les **variations ne changent pas** : décroissante puis croissante.

Exemple — $g(x) = x^2 + 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$g(x) = x^2 + 3$	12	7	4	3	4	7	12

Chaque image a augmenté de 3 : toute la courbe est montée de 3. Le minimum de g vaut **3**, atteint en $x = 0$.



Lecture de la figure. La courbe en tirets gris est celle de $f(x) = x^2$; la courbe bleue, au-dessus, celle de g . La flèche rouge montre que l'on passe de l'une à l'autre en montant de 3, à *toutes* les abscisses. Le point bleu est le nouveau sommet $S(0; 3)$.

Erreur fréquente — Le sommet ne reste pas en $(0; 0)$

Pour $g(x) = x^2 + 3$, le sommet est en $(0; 3)$. Pour le vérifier en une seconde : calculer $g(0)$. C'est toujours $g(0)$ qui donne l'ordonnée du sommet.

Application 7 – Une parabole décalée

Soit $g(x) = x^2 + 5$.

- Calculer $g(0)$ et $g(4)$.
- Donner le minimum de g et l'abscisse où il est atteint.
- Comment obtient-on la courbe de g à partir de celle de $f(x) = x^2$?

Correction — Application 7

- $g(0) = 0^2 + 5 = 5$ et $g(4) = 16 + 5 = 21$.
- Le minimum vaut 5, atteint en $x = 0$: le sommet est $S(0; 5)$.
- En décalant la parabole de f de 5 unités **vers le haut**, sans changer sa forme ni ses variations.

8 La transformation $h(x) = kx^2$ (C6)

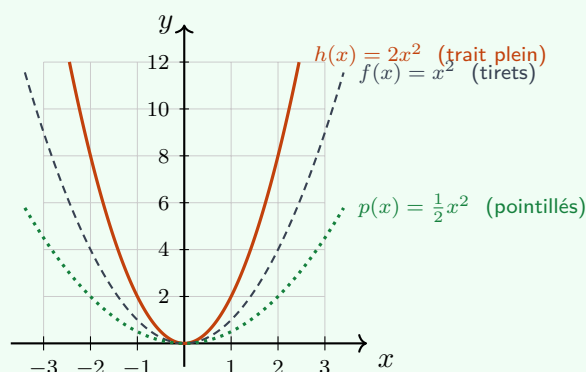
Définition — Resserrer, élargir, retourner

La fonction $h(x) = kx^2$ ($k \neq 0$) a pour courbe une parabole de **même sommet** $S(0; 0)$, mais d'allure différente : chaque ordonnée de f est multipliée par k .

- $k > 1$: parabole plus **resserrée** (elle monte plus vite) ;
- $0 < k < 1$: parabole plus **ouverte** (elle monte plus lentement) ;
- $k < 0$: parabole **retournée**, tournée vers le bas. Les variations sont inversées : croissante puis décroissante, et le sommet devient un **maximum**.

Exemple — $f(x) = x^2$, $h(x) = 2x^2$, $p(x) = \frac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4
$h(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8
$p(x) = \frac{1}{2}x^2$	2	0,5	0	0,5	2



Lecture de la figure. Les trois paraboles ont le même sommet $S(0; 0)$. À une même abscisse, l'ordonnée de h est le double de celle de f , celle de p en est la moitié : h est la plus resserrée, p la plus ouverte.

Pour $x = 3$: $p(3) = 4,5 < f(3) = 9 < h(3) = 18$. La parabole de h est la plus resserrée, celle de p la plus ouverte.

Remarque

Ces fonctions kx^2 ne sont pas des curiosités : l'aire d'un carrelage, la puissance dissipée par effet Joule $P = RI^2$, la résistance d'une tablette en fonction de son épaisseur s'écrivent toutes sous cette forme. Le coefficient k y porte une unité.

Application 8 – Le coefficient k

Soit $h(x) = 3x^2$.

- Calculer $h(2)$ et $h(-2)$.
- Comparer $h(2)$ à $f(2) = 4$: que constate-t-on ?
- La parabole de h est-elle plus resserrée ou plus ouverte que celle de f ?

Correction — Application 8

- $h(2) = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$ et $h(-2) = 3 \times (-2)^2 = 12$. La symétrie vaut aussi pour kx^2 .
- $h(2) = 3 \times f(2)$: chaque ordonnée est multipliée par 3.
- Plus **resserrée**, puisque $k = 3 > 1$.

9 Résoudre $x^2 = c$ par le calcul (C5)

Rappel de cours — La racine carrée

Pour un nombre c **positif ou nul**, la racine carrée de c , notée $\sqrt{c}$, est le nombre **positif** dont le carré vaut c :

$$\sqrt{c} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{c})^2 = c$$

$$\sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \sqrt{0,64} = 0,8 \quad ; \quad \sqrt{1,21} = 1,1 \quad ; \quad \sqrt{6} \approx 2,45 \text{ (touche } \sqrt{\text{ de la calculatrice).}$$

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée : $\sqrt{-4}$ n'existe pas.

Proposition — Solutions de l'équation $x^2 = c$

- si $c > 0$: **deux** solutions opposées, $x = \sqrt{c}$ et $x = -\sqrt{c}$;
- si $c = 0$: une seule solution, $x = 0$;
- si $c < 0$: **aucune** solution, puisque $x^2 \geq 0$ pour tout x .

Méthode — Se ramener à $x^2 = c$

Une équation $kx^2 = c$ ou $x^2 + b = c$ se traite comme une équation du premier degré, en isolant x^2 :

1. faire passer le terme constant de l'autre côté ;
2. diviser par le coefficient de x^2 ; on obtient $x^2 = c$;
3. conclure avec la propriété ci-dessus, puis **vérifier**.

Exemple — Quatre équations résolues

- a. $3x^2 = 363 \Rightarrow x^2 = \frac{363}{3} = 121 \Rightarrow x = 11$ ou $x = -11$. $\mathcal{S} = \{-11; 11\}$
- b. $x^2 - 4 = 165 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$ ou $x = -13$. $\mathcal{S} = \{-13; 13\}$
- c. $x^2 = 6$: valeurs exactes $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$; valeurs approchées $x \approx 2,45$ ou $x \approx -2,45$.
- d. $x^2 + 7 = 3 \Rightarrow x^2 = -4$: impossible. $\mathcal{S} = \emptyset$

Erreur fréquente — N'écrire qu'une seule solution

Pour $x^2 = 225$, répondre « $x = 15$ » et s'arrêter là est faux : $(-15)^2 = 225$ aussi. On écrit d'abord les **deux** solutions, $\mathcal{S} = \{-15; 15\}$.

Méthode — Revenir à la situation

Une longueur, une durée, une épaisseur, une vitesse sont **positives**. On trouve donc les deux solutions, puis on écarte la négative **en le justifiant** : « un côté ne peut pas être négatif ».

Exemple — Le tapis carré

Un tapis de gymnastique carré a une aire de $20,25 \text{ m}^2$. Son côté c vérifie $c^2 = 20,25$, donc $c = 4,5$ ou $c = -4,5$. Une longueur étant positive, le côté mesure $4,5 \text{ m}$. **Contrôle** : $4,5^2 = 20,25$.

Application 9 – Trois équations et une situation

- a. Résoudre $x^2 = 16$, puis $x^2 = -1$, puis $x^2 + 12 = 208$.
 b. Une bâche de protection carrée a une aire de $1,21 \text{ m}^2$. Quelle est la longueur de son côté ? Justifier le choix de la solution.

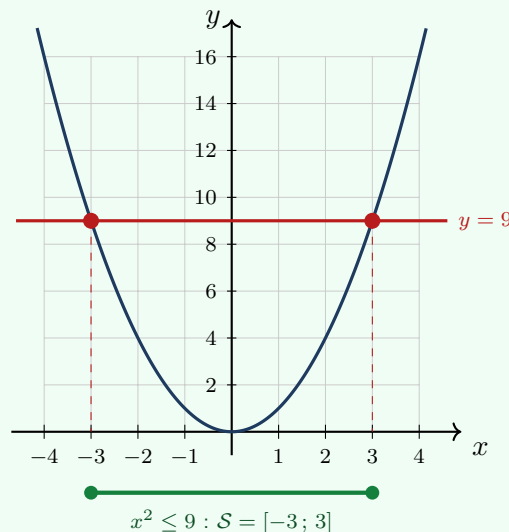
Correction — Application 9

- a. $x^2 = 16 : \mathcal{S} = \{-4; 4\}$. $x^2 = -1 : \text{aucune solution, } \mathcal{S} = \emptyset$. $x^2 + 12 = 208$ donne $x^2 = 196$, donc $\mathcal{S} = \{-14; 14\}$.
 b. $c^2 = 1,21$ donne $c = 1,1$ ou $c = -1,1$. Un côté est une longueur, donc positive : le côté mesure $1,1 \text{ m}$. *Contrôle* : $1,1^2 = 1,21$.

10 Résoudre graphiquement $x^2 = c$ et $x^2 < c$ (C9)**Méthode — Lire une équation et une inéquation sur la parabole**

1. tracer la parabole de $f(x) = x^2$, puis l'horizontale $y = c$;
2. $x^2 = c$: lire les **abscisses** des points d'intersection ;
3. $x^2 < c$: repérer les x pour lesquels la courbe est **en dessous** de l'horizontale ;
4. $x^2 > c$: repérer les x pour lesquels la courbe est **au-dessus**.

La réponse se lit toujours sur l'**axe des abscisses**.

Exemple — Avec $c = 9$ 

Lecture de la figure. La droite rouge est l'horizontale $y = 9$. Elle coupe la parabole en deux points, d'abscisses -3 et 3 (pointillés). Le trait vert épais, sur l'axe des abscisses, marque les x pour lesquels la courbe est *en dessous* de la droite, bornes comprises.

L'horizontale $y = 9$ coupe la parabole en $x = -3$ et $x = 3$.

- $x^2 = 9 : \mathcal{S} = \{-3; 3\}$;
- $x^2 \leq 9$: la courbe est en dessous **entre** les deux points, $\mathcal{S} = [-3; 3]$;
- $x^2 > 9$: la courbe est au-dessus **à l'extérieur**, $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

Proposition — Les deux inéquations, pour $c > 0$

$$x^2 \leq c \iff -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c} \quad \text{soit} \quad \mathcal{S} = [-\sqrt{c}; \sqrt{c}]$$

$$x^2 \geq c \iff x \leq -\sqrt{c} \text{ ou } x \geq \sqrt{c} \quad \text{soit} \quad \mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{c}] \cup [\sqrt{c}; +\infty[$$

Avec des inégalités strictes, les bornes sont exclues : crochets ouverts.

Erreur fréquente — Oublier la moitié gauche

$x^2 < 9$ n'a pas pour solution $x < 3$: il faut aussi $x > -3$, car $(-5)^2 = 25$ est bien plus grand que 9. La solution est un **intervalle encadré**, $] -3 ; 3[$. Le dessin le montre d'un coup d'œil.

Remarque

Dans une situation concrète où l'inconnue est une longueur, on ne garde que la partie positive de l'intervalle. « L'aire du carré ne doit pas dépasser 14 m^2 » donne $c^2 \leq 14$, donc $-\sqrt{14} \leq c \leq \sqrt{14}$, et finalement $0 < c \leq \sqrt{14} \approx 3,74 \text{ m}$.

Application 10 – Graphiquement, puis par le calcul

- À l'aide de la parabole ci-dessus, résoudre $x^2 < 4$ puis $x^2 \geq 16$.
- Retrouver ces deux résultats par le calcul.
- Un agenceur pose un revêtement dans une pièce carrée. Le coût total est $C(c) = 45c^2 + 120$ euros, où c est le côté en mètres. Le budget est de 750 € : quel côté maximal peut-il accepter ?

Correction — Application 10

- $y = 4$ coupe la parabole en -2 et 2 ; la courbe est en dessous entre les deux : $\mathcal{S} =]-2; 2[$.
 $y = 16$ coupe en -4 et 4 ; la courbe est au-dessus à l'extérieur : $\mathcal{S} =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$.
- $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{16} = 4$: le calcul donne les mêmes bornes.
- $45c^2 + 120 \leq 750$ donne $45c^2 \leq 630$, puis $c^2 \leq 14$. Le côté est positif, donc $c \leq \sqrt{14} \approx 3,74$. La pièce peut mesurer au maximum **environ** $3,74 \text{ m}$ de côté. *Contrôle* : $45 \times 3,74^2 + 120 \approx 749,5 \text{ €}$, inférieur au budget.

11 Lire les variations d'une fonction quelconque (C10)

Jusqu'ici, une seule courbe a été étudiée : la parabole. Les mêmes mots – croissante, décroissante, maximum, minimum – servent pour **toute** fonction dont on connaît la courbe : une température, un niveau d'eau, une puissance.

Définition — Sens de variation et extremums sur un intervalle

- f est **croissante** sur un intervalle si sa courbe **monte** quand on la parcourt de gauche à droite ; elle est **décroissante** si sa courbe **descend**.
- Sur un intervalle I , le **maximum** de f est la plus grande valeur prise par $f(x)$; le **minimum** est la plus petite. Maximum et minimum sont des **extremums**.
- Un extremum est une **valeur de f** : il se lit sur l'axe vertical. L'abscisse où il est atteint se lit sur l'axe horizontal.

Exemple — La température d'une journée de printemps

Un thermomètre relève la température T , en $^{\circ}\text{C}$, au cours d'une journée. Le temps t est compté en heures depuis minuit : $0 \leq t \leq 24$.



Lecture de la figure. La courbe bleue donne la température à chaque heure. Le point vert est le creux de la courbe, le point rouge son sommet ; les pointillés les ramènent sur les deux axes.

Le creux est le point (5 ; 6), le sommet le point (15 ; 18). On en tire le tableau de variations :

t (h)	0	5	15	24
Variations de T	10	6	18	9

- T est décroissante sur $[0 ; 5]$, croissante sur $[5 ; 15]$, décroissante sur $[15 ; 24]$;
- sur $[0 ; 24]$: le maximum est 18°C , atteint à 15 h ; le minimum est 6°C , atteint à 5 h ;
- sur $[15 ; 24]$: le maximum est 18°C , atteint à 15 h ; le minimum est 9°C , atteint à 24 h. Un extremum peut être atteint **au bord** de l'intervalle.

Méthode — Passer de la courbe au tableau de variations

1. repérer les points où la courbe **change de sens** : ses sommets et ses creux ;
2. écrire dans la ligne des x les deux bornes et les abscisses de ces points, dans l'ordre ;
3. sous chaque abscisse, écrire son image : **en haut** pour un sommet, **en bas** pour un creux ; aux bornes,

suivre le sens de la flèche voisine ;

4. relier par des flèches : une flèche qui **monte** là où la fonction est croissante, une flèche qui **descend** là où elle est décroissante.

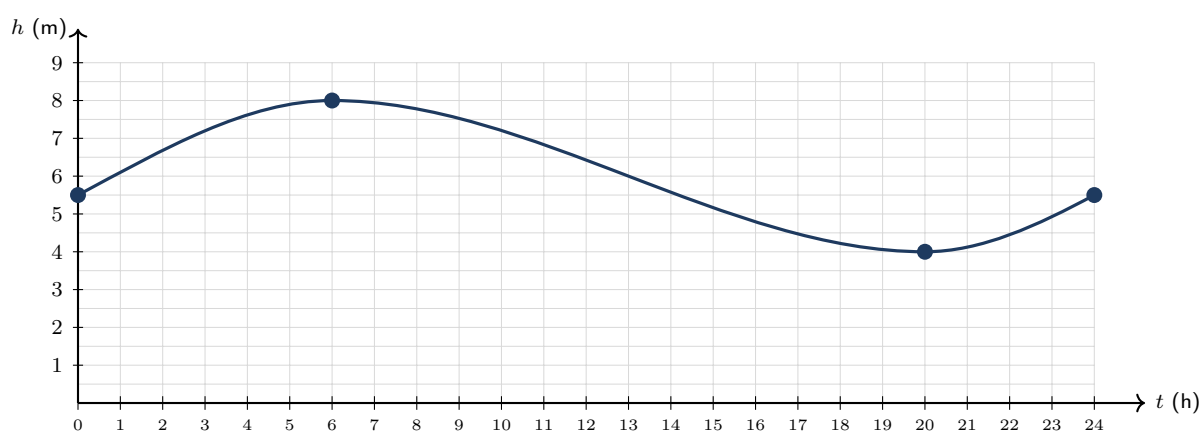
Dans l'autre sens, le tableau de variations donne l'allure de la courbe.

Erreur fréquente — Confondre le maximum et l'heure où il est atteint

Le maximum de la température est 18 (des degrés), atteint à 15 h. Répondre « le maximum est 15 », c'est lire le mauvais axe. De même, sur $[15 ; 24]$, on ne regarde que la partie de la courbe située au-dessus de cet intervalle : le point le plus bas de la journée, à 5 h, n'en fait pas partie.

Application 11 – Le niveau d'un château d'eau

La courbe donne la hauteur d'eau h , en mètres, dans le réservoir d'un château d'eau au cours d'une journée (t en heures). Les pompes remplissent le réservoir la nuit ; la consommation des habitants le vide en journée.



Lecture de la figure. Les points bleus marquent le début et la fin de la journée, ainsi que les endroits où la courbe change de sens.

- a. Dresser le tableau de variations de h sur $[0 ; 24]$.

t (h)	
Variations de h	

- b. Donner le maximum et le minimum de h sur $[0 ; 24]$, et l'heure où chacun est atteint.

- c. Quel est le minimum de h sur $[0 ; 6]$?

Correction — Application 11

a.

t (h)	0	6	20	24
Variations de h	5,5	8	4	5,5

- b. Maximum : 8 m, atteint à 6 h. Minimum : 4 m, atteint à 20 h.

- c. Sur $[0 ; 6]$, h est croissante : le minimum est 5,5 m, atteint à 0 h, au bord de l'intervalle.

Définition — Ajouter k , multiplier par k

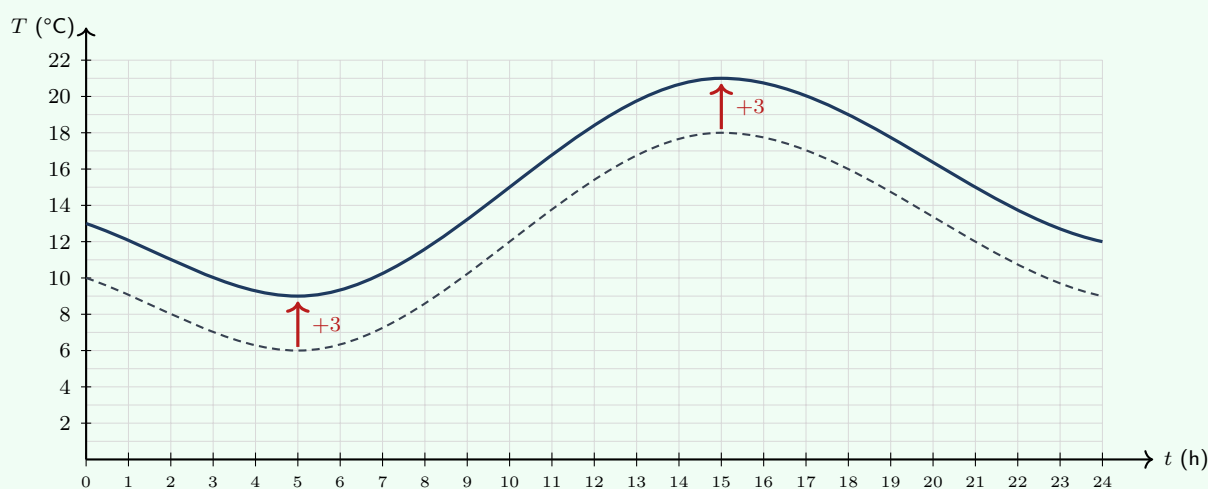
Soit f une fonction et k un nombre fixe.

- $x \mapsto f(x) + k$: sa courbe est celle de f **décalée verticalement de k** , vers le haut si $k > 0$, vers le bas si $k < 0$. Les **variations ne changent pas** ; les extremums augmentent de k et restent atteints aux mêmes abscisses.
- kf avec $k > 0$: chaque image est multipliée par k . Les **variations ne changent pas** ; les extremums sont multipliés par k .
- kf avec $k < 0$: les variations sont **inversées**. Là où f croît, kf décroît ; le maximum de f donne le minimum de kf , et inversement.

C'est ce qui a été vu pour la parabole : $x^2 + k$ au §7, kx^2 au §8.

Exemple — Une journée plus chaude de 3 °C

Le lendemain, il fait 3 °C de plus que la veille, à toute heure : $T_2(t) = T(t) + 3$.



Lecture de la figure. En tirets gris, la température de la veille ; en bleu, celle du lendemain. Les flèches rouges montrent que toute la courbe est montée de 3.

t (h)	0	5	15	24
Variations de T_2	13	9	21	12

Mêmes variations que T . Le maximum passe à 21 °C, toujours à 15 h ; le minimum à 9 °C, toujours à 5 h.

Exemple — Multiplier par 2, puis par -1

Une fonction f est définie sur $[-2; 4]$ par son tableau de variations.

x	-2	1	4
Variations de f	1	5	-3

- $2f$: chaque image est doublée, les variations restent les mêmes. Tableau : 2 ↗ 10 ↘ -6. Le maximum de $2f$ est 10, atteint en $x = 1$.

— $-f$: chaque image change de signe, les variations s'inversent. Tableau : $-1 \searrow -5 \nearrow 3$. Le maximum 5 de f devient le **minimum** -5 de $-f$, atteint au même endroit, $x = 1$.

x	-2	1	4
Variations de $-f$	-1	-5	3

Application 12 – Ajouter k , multiplier par k

a. Dans le château d'eau de l'application 11, le réservoir a une section de 150 m^2 : le volume d'eau, en mètres cubes, vaut $V(t) = 150 h(t)$. Donner les variations de V et son maximum.

b. Une fonction f est définie sur $[-4; 3]$ par son tableau de variations. Dresser le tableau de variations de $g(x) = f(x) + 5$.

x	-4	-1	3
Variations de f	-1	3	-2

c. Dresser le tableau de variations de $h(x) = -2f(x)$, puis donner le maximum et le minimum de h , et où ils sont atteints.

Correction — Application 12

a. $k = 150 > 0$: V a les mêmes variations que h – croissante sur $[0; 6]$, décroissante sur $[6; 20]$, croissante sur $[20; 24]$. Son maximum vaut $150 \times 8 = 1200 \text{ m}^3$, atteint à 6 h.

b. On ajoute 5 à chaque image, les variations ne changent pas : $4 \nearrow 8 \searrow 3$ (sous $-4, -1$ et 3).

c. On multiplie chaque image par -2 , les variations s'inversent : $2 \searrow -6 \nearrow 4$ (sous $-4, -1$ et 3). Le maximum de h est 4, atteint en $x = 3$; son minimum est -6 , atteint en $x = -1$. Le maximum 3 de f est devenu le minimum de h .

12 Chercher un extremum par balayage : tableur et Python (C10)

Le programme cite pour ce chapitre un algorithme : **la recherche d'un extremum par balayage**. Au §11, l'extremum se lisait sur une courbe ; ici, on le cherche par le calcul. Balayer, c'est essayer des valeurs l'une après l'autre et garder la meilleure. C'est ce que fait un métreur quand il cherche la forme la plus avantageuse à quantité de matériau fixée.

Exemple — La situation : 24 m de clôture

Un lycée dispose de 24 m de grillage pour fermer un enclos **rectangulaire** à outils. Si l'un des côtés mesure x mètres, l'autre mesure $12 - x$ mètres, puisque les quatre côtés totalisent 24. L'aire de l'enclos est donc $A(x) = x(12 - x)$, avec $0 < x < 12$.

Méthode — Au tableur : balayer de mètre en mètre

A	côté x (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	aire (m ²)	11	20	27	32	35	36	35	32	27	20

Le tableau est couché pour tenir sur la page : à l'écran, la colonne A contient les côtés (de A2 à A11) et la colonne B les aires. En B2 on saisit $=A2*(12-A2)$, puis on recopie la formule vers le bas. La ligne des aires monte, atteint 36, puis redescend **symétriquement** : le maximum est 36 m², pour $x = 6$. Et pour $x = 6$, l'autre côté vaut $12 - 6 = 6$: l'enclos le plus grand est un **carré**.

Méthode — En Python : le même balayage, au dixième

L'en-tête des fonctions est donné ; il reste à compléter le calcul.

```
def aire(x):                                l'aire pour un côté x
    return x * (12 - x)

def balayage():                             on essaie x = 0,1 ; 0,2 ; ... ; 11,9
    meilleure = 0                          la meilleure aire trouvée jusqu'ici
    cote = 0                               le côté qui l'a donnée
    for n in range(1, 120):
        x = n / 10
        if aire(x) > meilleure:             a-t-on fait mieux ?
            meilleure = aire(x)             si oui, on retient
            cote = x
    return cote, meilleure
```

`balayage()` renvoie (6.0, 36.0) : le même résultat qu'au tableur, mais cherché de dixième en dixième.

Erreur fréquente — Ce que le balayage ne prouve pas

Le balayage ne *démontre* rien : il essaie des valeurs. Entre deux essais, il ne regarde pas. Il donne une valeur approchée de l'extremum et l'endroit où le chercher – c'est déjà ce qu'attend un chantier, mais ce n'est pas une preuve.

Remarque

Le balayage sert aussi à **encadrer une racine carrée** sans la touche $\sqrt{}$: pour $c^2 = 50$, on essaie $7^2 = 49$ puis $8^2 = 64$, d'où $7 < c < 8$; puis au dixième, $7,0^2 = 49$ et $7,1^2 = 50,41$, d'où $7,0 < c < 7,1$. Chaque étape divise l'amplitude par 10. Cela fonctionne parce que la fonction carré est **croissante** sur les nombres positifs : encadrer le carré revient à encadrer le côté.

Application 13 – Compléter les deux outils

Un menuisier dispose de 16 m de tasseau pour encadrer un panneau rectangulaire. Si un côté mesure x mètres, l'autre mesure $8 - x$ mètres, et l'aire est $A(x) = x(8 - x)$.

a. Compléter le balayage au tableur :

côté x (m)	1	2	3	4	5	6	7
aire (m ²)							

b. Quelle est l'aire maximale, et pour quel côté ? Quelle forme a alors le panneau ?

c. Dans la fonction aire ci-dessus, quelle ligne faudrait-il changer pour traiter ce nouveau problème ?

Correction — Application 13

- a. 7 ; 12 ; 15 ; 16 ; 15 ; 12 ; 7 (en m²). Les valeurs montent puis redescendent symétriquement.
 b. L'aire maximale est 16 m², pour $x = 4$. L'autre côté vaut alors $8 - 4 = 4$: le panneau est un **carré**. C'est le même constat que pour l'enclos.
 c. La ligne `return x * (12 - x)`, qui devient `return x * (8 - x)`. Le reste du balayage ne change pas – sauf la borne de range, qu'il suffit de ramener à 80 pour ne pas essayer des côtés impossibles.

Bilan – Je sais faire**À retenir**

Ce que je sais faire à la fin du chapitre.

- **Calculer une image** : $f(x) = x^2$, avec des parenthèses pour les négatifs. Un carré est toujours positif ou nul. (C1)
- **Utiliser la symétrie** : $f(-x) = f(x)$; deux opposés ont la même image, et la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. (C4)
- **Tracer la parabole** à partir d'un tableau de valeurs symétriques, à main levée, sommet en (0 ; 0). (C2)
- **Lire et compléter le tableau de variations** : décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, minimum 0 en $x = 0$. (C3)
- **Comparer deux carrés sans les calculer** : plus un nombre est loin de zéro, plus son carré est grand. (C8)
- **Chiffrer un agrandissement** : côté $\times n$ donne aire $\times n^2$ – côté doublé, facture de revêtement multipliée par 4. (C7)
- **Exploiter les transformations** : $x^2 + k$ décale la parabole de k vers le haut et le minimum devient k ; kx^2 la resserre ($k > 1$), l'élargit ($0 < k < 1$) ou la retourne ($k < 0$). (C6)
- **Résoudre $x^2 = c$** : deux solutions $\pm\sqrt{c}$ si $c > 0$, une si $c = 0$, aucune si $c < 0$ – puis écarter la solution négative si l'inconnue est une longueur, *en le justifiant*. (C5)
- **Résoudre $x^2 < c$** : en dessous de l'horizontale $y = c$, donc entre $-\sqrt{c}$ et $\sqrt{c}$; au-dessus pour $x^2 > c$, donc à l'extérieur. (C9)
- **Lire les variations d'une fonction quelconque** : de la courbe au tableau de variations, maximum et minimum sur un intervalle – une valeur de f , atteinte en une abscisse, parfois au bord. (C10)
- **Transformer** : $f + k$ décale la courbe de k sans changer les variations ; kf garde les variations si $k > 0$ et les inverse si $k < 0$. (C10)
- **Balayer** au tableur ou en Python pour approcher un extremum – en sachant que le balayage approche, mais ne démontre pas. (C10)

Méthode — Comment vérifier ma réponse

- une image est **positive ou nulle** : une image négative est une erreur de signe ;
- une équation $x^2 = c$ avec $c > 0$ a **deux** solutions : n'en avoir écrit qu'une est le défaut le plus fréquent ;
- une longueur trouvée doit être **positive**, et le contrôle se fait en recalculant le carré ;
- une solution d'inéquation $x^2 < c$ est un intervalle **encadré** par deux nombres opposés ;
- si le côté a été multiplié par n et que l'aire n'a pas été multipliée par n^2 , reprendre le calcul ;
- un maximum ou un minimum se lit sur l'axe **vertical** ; l'endroit où il est atteint, sur l'axe horizontal.