

Fiche de cours — Fonction linéaire et proportionnalité

Tout le cours en deux pages, recto-verso. À garder sous les yeux pendant les exercices et à relire avant l'évaluation.

1. Reconnaître une proportionnalité

Définition

x et y sont **proportionnelles** s'il existe un nombre fixe k tel que $y = kx$. Pour $x \neq 0$: $k = \frac{y}{x}$.

Test sur un tableau : diviser chaque sortie par son entrée. Si *tous* les quotients sont égaux, c'est proportionnel, et ce quotient est k .

Erreur fréquente

Une **part fixe** ajoutée – déplacement, abonnement, frais – détruit la proportionnalité. Avec $30 \text{ €/h} + 50 \text{ €}$: $\frac{80}{1} = 80$ mais $\frac{110}{2} = 55$.

2. La fonction linéaire

$$f(x) = kx \quad - \quad \text{rien d'ajouté}$$

$f(0) = 0$ la droite passe par l'origine
 $f(1) = k$ l'image de 1 est le coefficient
 $k > 0$ fonction croissante
 $k < 0$ fonction décroissante

Le coefficient se note k (proportionnalité) ou a (**coefficient directeur** de la droite) : c'est le même nombre.

Exemple

Peinture à $0,35 \text{ L}$ par m^2 : $C(s) = 0,35s$. C'est linéaire, et $C(0) = 0$ – sans surface, pas de peinture.

Ne sont pas linéaires

$g(x) = 3x + 2$ (terme ajouté, $g(0) = 2$) ni $p(x) = x^2$ (variable au carré).

3. Déterminer le coefficient

Méthode

À partir d'un couple $(x_0; y_0)$, $x_0 \neq 0$: **1.** $k = \frac{y_0}{x_0}$. **2.** Donner l'unité : sortie « par » entrée. **3.** Écrire $f(x) = kx$ et vérifier sur une autre valeur.

Exemple

18 m de tube posés en 3 h : $k = \frac{18}{3} = 6 \text{ m/h}$, donc $L(t) = 6t$.

Erreur fréquente

Retourner la division. 3 kg pour 12 € donne 4 €/kg , pas $0,25$. L'unité du résultat le dit.

4. Calculer une image

On **multiplie** : $f(a) = k \times a$, puis on écrit l'unité. Exemple : $P(s) = 170s$ donne $P(12) = 2040 \text{ kWh}$.

5. Revenir à la quantité

Antécédent

Si $f(x) = b$, alors x est un **antécédent** de b . Pour $f(x) = kx$ avec $k \neq 0$:

$$kx = b \implies x = \frac{b}{k}$$

Exemple

Gravats à 23 € le m^3 , budget 322 € : $23x = 322$, $x = 14 \text{ m}^3$.
 Vérification : $23 \times 14 = 322$. ✓

Le critère, une fois pour toutes

Entrée connue → je multiplie (image). **Sortie connue** → je divise (antécédent).

6. Tableau de valeurs

Choisir des x , dont **toujours** $x = 0$, et multiplier par k .

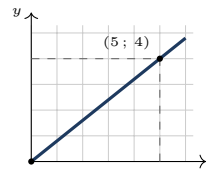
x	−2	0	1	2	3
$3x$	−6	0	3	6	9

Le tableau obtenu est lui-même un tableau de proportionnalité.

7. Tracer la droite

Méthode

1. L'origine $O(0; 0)$ est offerte. **2.** Calculer un second point **loin** de l'origine. **3.** Tracer à la règle. **4.** Vérifier avec un troisième point.



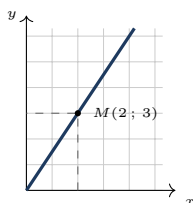
$f(x) = 0,8x$: deux points suffisent, l'origine et $(5; 4)$.

Erreur fréquente

Prendre un second point trop proche de l'origine : une erreur d'un millimètre fait pivoter toute la droite.

8. Lire k sur un graphique

Choisir un point $M(x_M; y_M)$ dont les **deux** coordonnées tombent sur des graduations, puis $k = \frac{y_M}{x_M}$.



$$k = \frac{3}{2} = 1,5, \text{ donc } f(x) = 1,5x.$$

Plus $|k|$ est grand, plus la droite est inclinée. Le *signe* de k dit seulement si elle monte ou descend. Un point lu *entre* deux graduations donne un coefficient faux : on en cherche un autre, quitte à s'éloigner de l'origine.

9. Tableur et Python

Tableur = A2*8 puis recopier vers le bas

```
Python def prix(x):
    return 8*x
```

Les deux calculent des **images** en série. Ils ne remontent pas de la sortie vers l'entrée : pour cela, il faut résoudre $kx = b$.

10. Quatre calculs déguisés

Calcul	Coefficient
p % d'un nombre	$\frac{p}{100}$
TVA à 20 %	0,20
Convertir une unité	le facteur
Échelle $1/n$ (plan $\rightarrow$ réel)	n

Erreur fréquente

Remise de 12 % : le *montant* de la remise est $0,12x$, le *prix payé* est $0,88x$. Deux fonctions linéaires, deux coefficients.

Quelle question m'est posée ?

L'énoncé donne	Je fais
un tableau, « est-ce proportionnel ? »	je divise colonne par colonne
un couple de valeurs	$k = \frac{y_0}{x_0}$
une quantité, je cherche un montant	je multiplie par k
un montant, je cherche une quantité	je résous $kx = b$
une droite dans un repère	je lis un point, puis $\frac{y_M}{x_M}$
beaucoup de quantités d'un coup	tableur ou Python

Je sais faire

- ☐ dire si un tableau est proportionnel, en calculant les quotients ;
- ☐ reconnaître une fonction linéaire et donner son coefficient ;
- ☐ calculer k à partir d'un couple de valeurs, avec son unité ;
- ☐ calculer une image, et revenir à la quantité en résolvant $kx = b$;
- ☐ construire un tableau de valeurs et tracer la droite à la règle ;
- ☐ lire un coefficient sur un graphique ;
- ☐ écrire une formule de tableur et une fonction Python ;
- ☐ traiter un pourcentage, une conversion ou une échelle comme une fonction linéaire.

Un problème type, du début à la fin

Sur un plan au $1/50$, une façade mesure 16 cm sur 6 cm. Le bardage coûte 15,50 € le m^2 HT. TVA 20 %.

- Échelle : $R(x) = 50x$, donc 8 m sur 3 m.
- Surface : $8 \times 3 = 24 m^2$.
- Prix HT : $15,5 \times 24 = 483,75$ €.
- TVA : $0,20 \times 483,75 = 96,75$ €.
- À payer : $483,75 + 96,75 = 580,50$ € TTC.

Le piège de l'étape 2

L'échelle s'applique aux **longueurs**, jamais directement à une aire. On convertit d'abord, on multiplie ensuite.