

Fiche de cours — Inéquations du premier degré

Tout le cours en deux pages, recto-verso. À garder sous les yeux pendant les exercices et à relire avant l'évaluation.

1. Équation ou inéquation ?

Définition

Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue : $ax + b < c$, $> c$, $\leq c$ ou $\geq c$. Sa solution n'est pas un nombre, mais un **ensemble de valeurs**.

- $<$ moins de, sans atteindre
- $>$ plus de, au-delà de
- $\leq$ **au maximum**, ne pas dépasser
- $\geq$ **au moins**, à partir de

Erreur fréquente

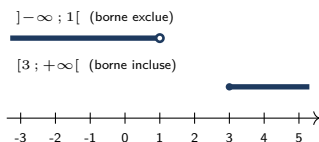
« Au maximum 250 » s'écrit ≤ 250 , et non < 250 : la valeur 250 est permise.

2. Intervalles et droite graduée

Définition

Crochet **fermé** : borne incluse ($\leq$, $\geq$). Crochet **ouvert** : borne exclue ($<$, $>$). Les infinis sont toujours ouverts.

$$\begin{aligned} x &> a &&]a; +\infty[\\ x &\geq a && [a; +\infty[\\ x &< b &&]-\infty; b[\\ x &\leq b &&]-\infty; b] \\ a &\leq x \leq b && [a; b] \end{aligned}$$



Point plein : borne incluse. Point vide : borne exclue.

Erreur fréquente

$x > 3$ ne s'écrit jamais $[3; +\infty[$. Le crochet suit le symbole, jamais l'inverse.

3. Résoudre $ax + b < c$

Méthode

1. Retrancher b aux deux membres. 2. Diviser par a . 3. Écrire l'intervalle.

Ajouter ou retrancher un nombre : le sens ne change pas. Multiplier ou diviser par un nombre **positif** : le sens ne change pas.

Exemple

$35h + 80 \leq 500$ donne $35h \leq 420$, puis $h \leq 12$. Au maximum **12 heures**.

4. La règle d'or

$\times$ ou $\div$ par un nombre **négatif**
 $\Rightarrow$ le sens de l'inégalité **s'inverse**

$$-2x \leq 10 \text{ donne } x \geq -5. \quad -3x > 9 \text{ donne } x < -3.$$

Erreur fréquente

Écrire $-3x > 9$ donc $x > -3$. Contrôle : $x = 0$ donnerait $0 > 9$, faux – pourtant 0 serait dans l'intervalle. Une valeur-test suffit à détecter l'oubli.

5. Se ramener à une forme connue

Méthode

Parenthèse : développer d'abord. Le facteur multiplie *chaque* terme ; un « moins » devant change tous les signes.

Quotient : multiplier les deux membres par le dénominateur. Ici toujours **positif**, donc le sens est conservé.

$$7 - 2(x - 1) > 3 \text{ donne } 7 - 2x + 2 > 3, \text{ et non } 7 - 2x - 2 > 3.$$

6. Des x dans les deux membres

Regrouper les x d'un côté, les nombres de l'autre. **Astuce** : les regrouper du côté où leur coefficient reste positif évite la règle d'or.

Exemple

$50 + 20n < 10 + 30n$ donne $40 < 10n$, soit $n > 4$: à partir de **5 livraisons**. À 4, les deux coûtent pareil – la borne est exclue.

7. Traduire une contrainte

Méthode

1. Nommer l'inconnue *avec son unité*. 2. Repérer le mot qui porte la contrainte. 3. Résoudre. 4. Écrire l'intervalle. 5. Interpréter.

plafond $\rightarrow$ arrondir **vers le bas**
 seuil à atteindre $\rightarrow$ arrondir **vers le haut**

$$12x + 35 \leq 500 \text{ donne } x \leq 38,75 : \mathbf{38 \text{ m}^2} \text{ de parquet.}$$

$$40x > 180 \text{ donne } x > 4,5 : \mathbf{5} \text{ installations au minimum.}$$

Erreur fréquente

Arrondir dans le sens de la calculatrice. Seule la phrase de l'énoncé dit le sens. Une durée, elle, ne s'arrondit pas : 10,5 h = 10 h 30.

8. Pour aller plus loin : deux contraintes à la fois

Complément hors programme de Seconde, non évalué.

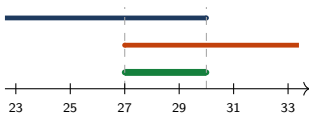
Définition — Encadrement

$a \leq \text{expression} \leq b$. On applique la même opération aux **trois** parties.

$$120 \leq 10v + 70 \leq 150 \text{ donne } 50 \leq 10v \leq 80, \text{ puis } 5 \leq v \leq 8.$$

Méthode — Deux contraintes séparées

Résoudre **chacune**, puis garder la partie **commune** aux deux intervalles : leur intersection, notée $\cap$.



$n \leq 30$ et $n \geq 27$ donnent $[27; 30]$: la partie où les traits se superposent.

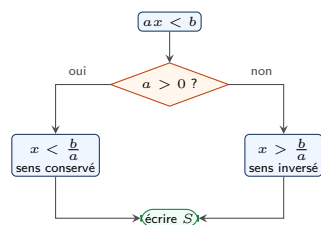
Erreur fréquente

Une intersection **vide** n'est pas une erreur : c'est la réponse. $x \geq 8$ et $x \leq 5$: aucune valeur ne convient, et cela se dit au client.

9. Vérifier et formaliser

Méthode — La valeur-test

Une valeur *dans* l'intervalle doit rendre l'inéquation **vraie** ; une valeur *hors* de l'intervalle doit la rendre **fausse**. Si l'un des deux se trompe, c'est le sens qui a été oublié.

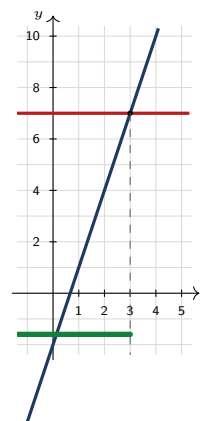


Le seul embranchement qui compte est le **signe de a** – pas la présence d'un nombre négatif quelque part.

10. Résoudre graphiquement

Méthode

Tracer $y = ax + b$ et la droite horizontale $y = c$. Lire les **abscisses** des points où la première est **en dessous** (ou sur) la seconde.



$3x - 2 \leq 7$: la droite bleue est sous la rouge jusqu'à $x = 3$. $S =]-\infty; 3]$.

Erreur fréquente

Donner l'ordonnée (7) au lieu de l'abscisse (3), ou hachurer du mauvais côté. Contrôle : tester $x = 0$.

Les contrôles essentiels

Ai-je divisé par un négatif ? Si oui, ai-je inversé le sens ? ■ Mon crochet correspond-il au symbole ? ■ Une valeur de mon intervalle vérifie-t-elle l'inéquation de départ ? ■ Une valeur hors de l'intervalle la met-elle en défaut ? ■ La réponse doit-elle être un entier, et dans quel sens arrondir ?

Je sais faire

- ☐ Choisir le symbole qui traduit une contrainte, et écrire l'intervalle.
- ☐ Représenter un intervalle sur une droite graduée, points pleins et vides.
- ☐ Résoudre une inéquation du type $ax + b < c$.
- ☐ Inverser le sens quand je divise par un nombre négatif.
- ☐ Développer une parenthèse ou supprimer un dénominateur pour m'y ramener.
- ☐ Résoudre une inéquation avec des x dans les deux membres.
- ☐ Traduire une contrainte de métier, et arrondir dans le bon sens.
- ☐ Contrôler ma solution par deux valeurs-tests.
- ☐ Lire les solutions d'une inéquation sur un graphique.