

Fiche de cours — Fonction dérivée et étude des variations

Tout le cours en deux pages, recto-verso. À garder sous les yeux pendant les exercices et à relire avant l'évaluation.

1. La tangente et le nombre dérivé

Deux définitions liées

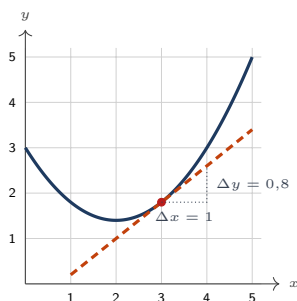
La droite qui passe par deux points A et M de la courbe est une **sécante**. Sa pente est le **taux de variation** $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Quand h diminue, la sécante bascule vers la **tangente** en A .

Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** en a .

2. Lire $f'(a)$ sur un graphique

1. Repérer le point de contact. 2. Choisir sur la tangente deux points à coordonnées **entières**. 3. Calculer $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Ici $f'(3) = \frac{0,8}{1} = 0,8$.

Tangente **horizontale** $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Erreur fréquente

$f(a)$ est une **hauteur**, $f'(a)$ une **pente**.
Ne pas lire l'ordonnée du point à la place de la pente.

3. Construire une tangente

Connaissant a , $f(a)$ et $f'(a)$: placer $A(a; f(a))$, avancer de 1, monter de $f'(a)$ — **descendre** si $f'(a) < 0$ — puis tracer à la règle, prolongée des deux côtés.

Si les deux axes n'ont pas la même échelle, calculer plutôt **deux points** de la tangente avec son équation.

4. L'équation réduite de la tangente

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Toujours dans cet ordre : $f(a)$, puis $f'(a)$, puis le développement. Contrôle : le point $(a; f(a))$ doit vérifier l'équation.

Tout près de a , la tangente et la courbe se confondent presque : c'est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de a . Loin de a , elle ne vaut plus rien.

5. Les dérivées à connaître

$f(x)$	k	$ax + b$	x^2	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	a	$2x$	$-\frac{1}{x^2}$

Deux règles admises : $(kf)' = k f'$ et $(f+g)' = f' + g'$.

On dérive **chaque terme** ; le terme constant disparaît.

Erreur fréquente

La dérivée de $3x^2 - 5x + 2$ n'est ni $6x - 5 + 2$ ni $6x$: c'est $6x - 5$.

6. Signe de f' et variations

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ croissante} \quad \blacksquare \quad f' < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}$$

Marche à suivre : dériver $\rightarrow$ résoudre $f'(x) = 0 \rightarrow$ signe de f' (elle est **affine**, son signe se lit sur son coefficient directeur) $\rightarrow$ sens de variation.

Erreur fréquente

C'est le signe de f' qui décide, jamais celui de f : une fonction peut être **négative et croissante**.

7. Le tableau de variations

x	0	4	7
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	12	$\searrow$ —4 $\nearrow$	5

Exemple pour $f(x) = x^2 - 8x + 12$ sur $[0; 7]$.

Quatre étapes : f' , puis $f'(x) = 0$, puis le signe, puis les flèches. Porter les **nombre**s aux bornes et à l'extremum : un tableau de flèches ne dit rien.

8. Extremum local, extremum global

Les deux mots

Local : plus grande (ou plus petite) valeur *juste autour*.

Global : plus grande (ou plus petite) valeur sur *tout* l'intervalle.

Un extremum global est toujours local ; l'inverse est faux.

Un extremum peut se trouver à **une borne**, là où f' ne s'annule pas : calculer toujours les valeurs aux deux bornes.

Et une dérivée qui s'annule ne donne pas toujours un extremum : il faut que le signe **change**.

Erreur fréquente

Répondre « l'extremum est en $x = 3$ » quand 3 n'appartient pas à l'intervalle d'étude.

9. La fonction inverse

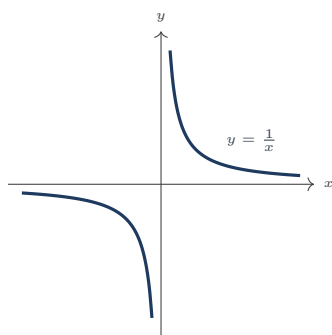
$f(x) = \frac{1}{x}$, définie pour $x \neq 0$. Courbe : une **hyperbole** en deux branches.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ pour tout } x \neq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Décroissante **sur chaque branche**, pas sur $\mathbb{R}$: $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

La pente s'**aplatit** quand x grandit : dans une situation modélisée par $\frac{k}{x}$, les gains s'écrasent.



10. Étudier une fonction : les cinq étapes

La marche à suivre, toujours la même

1. Dériver : calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ et **vérifier** que la solution est dans l'intervalle d'étude.
3. Donner le signe de f' , en s'appuyant sur son coefficient directeur.
4. Calculer f aux deux bornes et à l'extremum.
5. Dresser le tableau, puis répondre par une **phrase**, avec l'unité.

11. La dérivée, vitesse de variation

En physique, dériver une grandeur par le temps donne sa **vitesse de variation** :

distance $d(t)$ $d'(t)$: vitesse (m/s)
 vitesse $v(t)$ $v'(t)$: accélération (m/s²)
 énergie $E(t)$ $E'(t)$: puissance (kW)
 tension $u(t)$ $u'(t)$: mV par ms

Toujours donner l'**unité** de la dérivée : c'est l'unité de la grandeur *par* unité de temps.

12. Les mots du chapitre

sécante droite passant par deux points de la courbe
tangente position limite des sécantes en un point
nombre dérivé pente de la tangente, noté $f'(a)$
fonction dérivée la fonction f' qui donne cette pente en tout x
extremum maximum ou minimum
hyperbole courbe de la fonction inverse

13. Vérifier sa réponse

Cinq contrôles

1. Ai-je dérivé chaque terme, constante comprise ?
2. Mon tableau porte-t-il des nombres ?
3. Ai-je calculé les valeurs aux bornes ?
4. Mon extremum est-il dans l'intervalle d'étude ?
5. Ai-je donné l'unité de la dérivée ?

Je sais faire

- ☐ construire une tangente au logiciel et voir la sécante basculer ;
- ☐ lire un nombre dérivé sur un graphique ;
- ☐ construire une tangente connaissant $f'(a)$;
- ☐ écrire l'équation réduite d'une tangente ;
- ☐ dériver un polynôme de degré ≤ 2 ;
- ☐ étudier les variations à partir du signe de f' ;
- ☐ dresser un tableau de variations complet ;
- ☐ déterminer un extremum, et vérifier l'intervalle ;
- ☐ étudier la fonction inverse : dérivée, variations, courbe.

Ce que ce chapitre ne demande pas

Ni le **degré 3**, ni la règle générale $(x^n)'$, ni la dérivée d'un **produit** ou d'un **quotient**. Le **coût marginal** et le **coût moyen unitaire** relèvent d'un autre module, réservé aux spécialités sans physique-chimie.