

Version professeur

Mathématiques – Première Bac Pro**Cahier d'exercices****Chapitre 6****Fonction dérivée et étude des variations**

Édition : 17 septembre 2026 – Naïm Azzouz

Méthode — Mode d'emploi

Ce cahier suit les neuf capacités du chapitre, dans l'ordre du cours. Une règle est nécessaire : plusieurs exercices demandent de **tracer** une tangente, pas seulement de la calculer. Écrire le calcul, puis une phrase de réponse avec son unité quand la grandeur en a une. Dans tout le cahier, on ne dérive que des fonctions **affines**, la fonction **carré**, leurs sommes et leurs multiples, et la fonction **inverse**. Les corrections suivent chaque exercice dans cette version.

Repères et ordre de travail

Capacité et intitulé complet	Exercices	Pages
C1 – Construire la tangente à une courbe en un point à l'aide d'un outil numérique	1 à 3	2
C2 – Déterminer par lecture graphique le nombre dérivé d'une fonction en un point	4 à 7	4
C3 – Construire la tangente en un point connaissant le nombre dérivé	8 à 10	8
C4 – Écrire l'équation réduite de la tangente en un point	11 à 14	13
C5 – Utiliser les formules et règles de dérivation (degré ≤ 2)	15 à 19	16
C6 – Étudier les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée	20 à 23	18
C8 – Dresser le tableau de variations	24 à 26	20
C7 – Déterminer un extremum à partir du sens de variation	27 à 29	22
C9 – Étudier la fonction inverse : dérivée, variations, représentation	30 à 32	24

L'ordre suit celui du cours : le tableau de variations (C8) vient **avant** la recherche d'un extremum (C7), parce qu'il sert à le trouver. Le **degré 3**, la règle générale $(x^n)'$, la dérivée d'un produit ou d'un quotient ne figurent pas au programme de ce module : aucun exercice ne les emploie.

C1 – Construire la tangente à une courbe en un point à l'aide d'un outil numérique

Exigible. Prérequis : coefficient directeur d'une droite passant par deux points.

Rappel de cours

Entre deux points A et M d'une courbe, la droite (AM) est une **sécante**. Son coefficient directeur est le **taux de variation**

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quand h **diminue**, M se rapproche de A et la sécante pivote vers une position limite : la **tangente** en A . Le nombre vers lequel les pentes se dirigent est le **nombre dérivé** $f'(a)$.

Le programme demande d'*observer* ce basculement au logiciel avant d'écrire quoi que ce soit.

Exercice 1 — Quatre sécantes, une limite

On donne $f(x) = x^2$ et le point A d'abscisse 2.

- Calculer $f(2)$, puis le taux de variation de f entre 2 et 3. Détailler le calcul.
- Calculer de même le taux de variation entre 2 et 2,5.
- Au logiciel, on obtient encore 4,1 pour $h = 0,1$ et 4,01 pour $h = 0,01$. Compléter la suite des pentes obtenues : ... ; ... ; 4,1 ; 4,01.
- Vers quelle valeur ces pentes se dirigent-elles ? Comment s'appelle ce nombre, et que représente-t-il pour la courbe de f ?

Correction de l'exercice 1

a. $f(2) = 4$ et $f(3) = 9$, donc le taux vaut $\frac{9-4}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$.

b. $f(2,5) = 6,25$, donc $\frac{6,25-4}{0,5} = \frac{2,25}{0,5} = 4,5$.

c. Les quatre pentes sont 5 ; 4,5 ; 4,1 ; 4,01.

d. Elles se dirigent vers 4. C'est le **nombre dérivé** de f en 2, noté $f'(2)$: c'est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse 2.

À retenir : les pentes ne deviennent pas égales à 4, elles s'en approchent. C'est la position *limite* des sécantes qui définit la tangente.

Exercice 2 — La bille sur le plan incliné

Une bille est lâchée en haut d'un plan incliné. La distance parcourue depuis le départ, en mètres, est modélisée par $d(t) = 0,4t^2$, où t est le temps écoulé en secondes.

- Calculer $d(3)$ et $d(4)$, puis le taux de variation de d entre 3 et 4. Que représente ce nombre pour la bille ? Donner son unité.
- Calculer de même le taux de variation entre 3 et 3,5.
- Une acquisition automatique donne encore 2,44 pour $h = 0,1$ et 2,404 pour $h = 0,01$. Vers quelle valeur les taux se dirigent-ils ?
- Que représente cette valeur limite pour la bille, à l'instant $t = 3$ secondes ?

Correction de l'exercice 2

a. $d(3) = 0,4 \times 9 = 3,6$ m et $d(4) = 0,4 \times 16 = 6,4$ m.

Taux : $\frac{6,4 - 3,6}{4 - 3} = 2,8$ m/s. C'est la **vitesse moyenne** de la bille entre la 3^e et la 4^e seconde.

b. $d(3,5) = 0,4 \times 12,25 = 4,9$ m, donc $\frac{4,9 - 3,6}{0,5} = \frac{1,3}{0,5} = 2,6$ m/s.

c. Les taux 2,8 ; 2,6 ; 2,44 ; 2,404 se dirigent vers **2,4**.

d. C'est la **vitesse instantanée** de la bille à l'instant $t = 3$ s, soit 2,4 m/s : la vitesse qu'indiquerait un appareil de mesure à cet instant précis.

À **retenir** : la vitesse moyenne se calcule sur une *durée*, la vitesse instantanée à un *instant*. La seconde est la limite de la première quand la durée diminue. Ici les vitesses moyennes sont plus grandes que 2,4 parce que la bille **accélère** : après l'instant $t = 3$, elle va plus vite.

Exercice 3 — Au logiciel de géométrie dynamique

Au logiciel de géométrie dynamique, on veut retrouver le nombre dérivé de $f(x) = x^2 + 2x$ au point A d'abscisse 1.

a. Calculer $f(1)$: quelles sont les coordonnées de A ?

b. Recopier et compléter le protocole : « tracer la courbe de f ; placer le point A ; créer un curseur h ; placer le point M d'abscisse ... ; tracer la droite ... ; afficher son coefficient directeur ; faire ... le curseur h . »

c. Le logiciel affiche successivement les pentes 5 ; 4,5 ; 4,2 ; 4,05. Que peut-on conjecturer pour $f'(1)$?

d. La tangente en A monte-t-elle ou descend-elle ? Justifier sans calcul supplémentaire.

Correction de l'exercice 3

a. $f(1) = 1 + 2 = 3$, donc $A(1 ; 3)$.

b. « ... placer le point M d'abscisse $1 + h$; tracer la droite (AM) ; afficher son coefficient directeur ; faire **diminuer** le curseur h . »

c. Les pentes se dirigent vers 4 : on conjecture $f'(1) = 4$.

d. $f'(1) = 4$ est **positif**, donc la tangente **monte** : son coefficient directeur est positif.

Conduite : faire manipuler le curseur avant d'écrire. Le programme demande que le nombre dérivé naisse de cette observation. Le mot « conjecturer » est important : le logiciel montre, il ne démontre pas.

C2 – Déterminer par lecture graphique le nombre dérivé d'une fonction en un point

Exigible. Prérequis : C1, lecture de coordonnées.

Rappel de cours

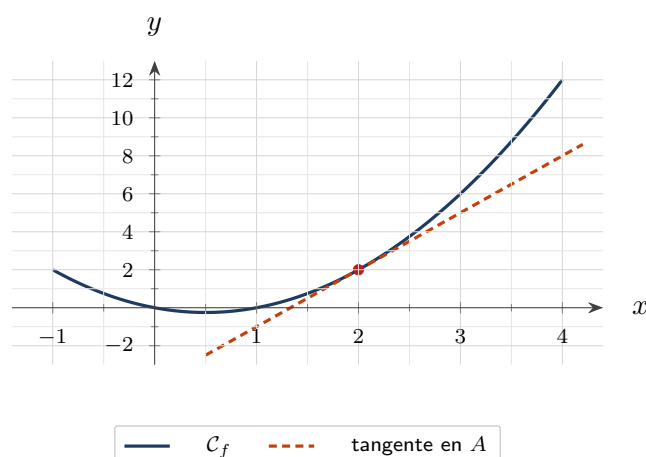
1. Repérer le point de contact et la tangente déjà tracée. 2. Choisir sur cette tangente **deux points à coordonnées entières**. 3. Calculer $f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: on avance de Δx , on monte (ou on descend) de Δy .

Une tangente **horizontale** a un nombre dérivé **nul**.

$f(a)$ est une **hauteur**, $f'(a)$ une **pen**te : deux nombres différents, qui répondent à deux questions différentes.

Exercice 4 — Hauteur ou pente ?

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f . La tangente au point A d'abscisse 2 y est déjà tracée.



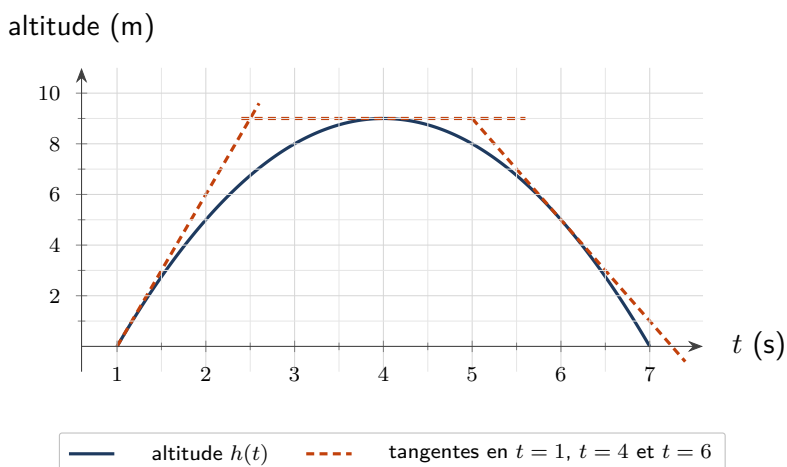
- Lire $f(2)$.
- Choisir sur la tangente deux points à coordonnées entières, les écrire, puis calculer $f'(2)$.
- La fonction f est-elle croissante ou décroissante au voisinage de $x = 2$? Justifier par le signe trouvé.
- En un point de la courbe, la tangente serait horizontale. Lire son abscisse et dire ce que vaut alors le nombre dérivé.

Correction de l'exercice 4

- $f(2) = 2$: c'est l'**ordonnée** du point A .
 - La tangente passe par $(2; 2)$ et par $(3; 5)$. $\Delta x = 3 - 2 = 1$ et $\Delta y = 5 - 2 = 3$, donc $f'(2) = \frac{3}{1} = 3$.
 - $f'(2) = 3 > 0$: la tangente monte, donc f est **croissante** au voisinage de $x = 2$.
 - La tangente est horizontale au **sommet** de la courbe, d'abscisse $x = 0,5$. En ce point, $f'(0,5) = 0$.
- Barème de lecture :* $f(2) = 2$ et $f'(2) = 3$ sont deux nombres différents. Le premier est une hauteur, le second une pente. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Exercice 5 — Le vol d'un drone

Un drone de relevé décolle, survole un chantier puis se pose. Son altitude, en mètres, est modélisée par une fonction h du temps t , en secondes. Trois tangentes ont été tracées.



- Lire $h'(1)$ en choisissant deux points à coordonnées entières de la tangente.
- Lire $h'(4)$. Que remarque-t-on ?
- Lire $h'(6)$.
- Donner l'unité de ces trois nombres et interpréter chacun d'eux pour le vol du drone.

Correction de l'exercice 5

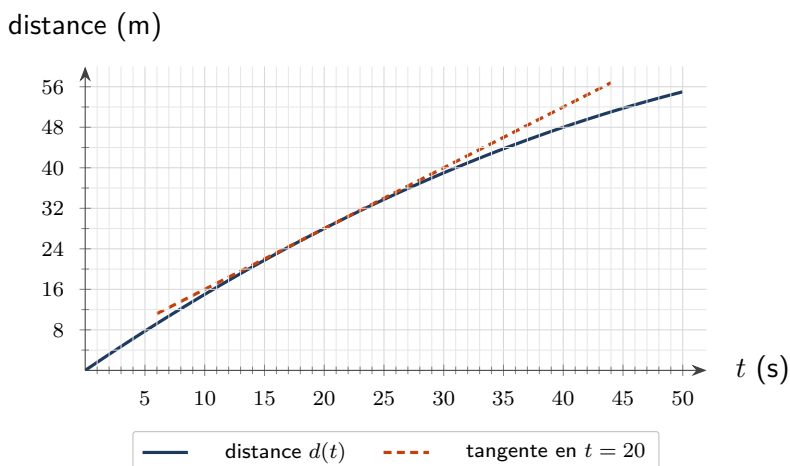
- La tangente en $t = 1$ passe par $(1 ; 0)$ et $(2 ; 6)$: $h'(1) = \frac{6 - 0}{2 - 1} = 6$.
- La tangente en $t = 4$ est **horizontale** : $h'(4) = 0$. C'est le point le plus haut du vol.
- La tangente en $t = 6$ passe par $(6 ; 5)$ et $(7 ; 1)$: $h'(6) = \frac{1 - 5}{7 - 6} = -4$.
- Ces nombres s'expriment en **mètres par seconde** : ce sont des vitesses de montée.

$h'(1) = 6 \text{ m/s}$: le drone **monte** de 6 mètres par seconde au décollage. $h'(4) = 0$: il ne monte ni ne descend, il est en **palier**, à son altitude maximale de 9 m. $h'(6) = -4 \text{ m/s}$: il **descend** de 4 mètres par seconde.

À **retenir** : le **signe** du nombre dérivé dit le sens — positif, ça monte ; négatif, ça descend ; nul, c'est un palier. Sa **valeur absolue** dit à quelle vitesse.

Exercice 6 — La nageuse et sa vitesse instantanée

Lors d'un 50 m nage libre, la distance parcourue par une nageuse, en mètres, est enregistrée en fonction du temps t , en secondes. La tangente au point d'abscisse 20 a été tracée.



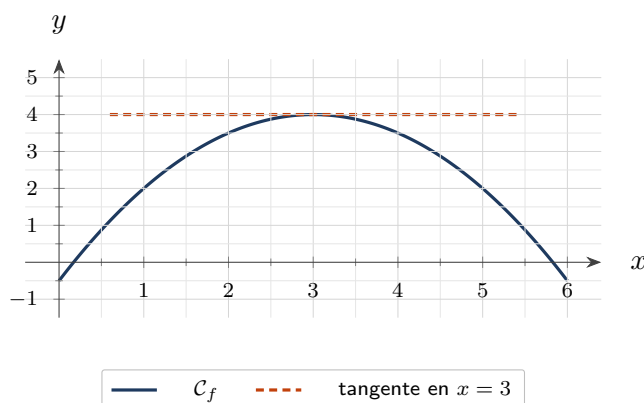
- Lire la distance parcourue au bout de 20 s.
- Lire $d'(20)$ en choisissant deux points à coordonnées entières de la tangente.
- Donner l'unité de $d'(20)$ et dire ce que ce nombre représente pour la nageuse.
- La nageuse termine son 50 m en 50 s : sa vitesse moyenne est donc de 1,1 m/s. Comparer avec le résultat du **b.** et proposer une explication.

Correction de l'exercice 6

- Au bout de 20 s, la nageuse a parcouru 28 m.
- La tangente passe par (10 ; 16) et (30 ; 40) : $d'(20) = \frac{40 - 16}{30 - 10} = \frac{24}{20} = 1,2$.
- En **mètres par seconde**. C'est la **vitesse instantanée** de la nageuse à la 20^e seconde : 1,2 m/s.
- 1,2 m/s à $t = 20$ contre 1,1 m/s en moyenne sur toute la course : la nageuse allait donc **plus vite que sa moyenne** à la 20^e seconde. La courbe s'aplatit vers la fin : elle **ralentit**, sans doute par fatigue.
Contrôle : $d(50) = -0,01 \times 2500 + 1,6 \times 50 = -25 + 80 = 55$ m. Le modèle donne 55 m en 50 s, soit 1,1 m/s de moyenne. ✓
Réserve à énoncer : cette expression est un **modèle fourni**, ajusté sur l'enregistrement. Une nage réelle comporte des virages et des accélérations ; la courbe décrit la tendance, pas le détail de chaque mouvement.

Exercice 7 — Un élève confond deux nombres

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f , avec sa tangente au point d'abscisse 3.



- Lire $f(3)$.
- Lire $f'(3)$.
- Un élève écrit : « $f'(3) = 4$ ». Expliquer son erreur en une phrase.
- Que peut-on dire du point de la courbe d'abscisse 3 ?

Correction de l'exercice 7

- $f(3) = 4$.
- La tangente est **horizontale** : son coefficient directeur est nul, donc $f'(3) = 0$.
- L'élève a lu l'**ordonnée** du point de contact au lieu de la **pente** de la tangente. Le nombre 4 est bien sur la figure, mais c'est $f(3)$, pas $f'(3)$.
- C'est le **sommet** de la courbe : la fonction y atteint sa plus grande valeur, 4. Avant $x = 3$ elle monte, après elle descend.

À retenir : quand la tangente est horizontale, le nombre dérivé vaut 0 — quelle que soit la hauteur à laquelle cette tangente se trouve.

C3 – Construire la tangente en un point connaissant le nombre dérivé

Exigible. Prérequis : C2, tracé d'une droite de coefficient directeur donné.

Rappel de cours

Connaissant a , $f(a)$ et $f'(a)$:

1. placer le point $A(a; f(a))$;
2. depuis A , avancer de 1 vers la droite et monter de $f'(a)$ — ou **descendre** si $f'(a)$ est négatif ;
3. tracer la droite à la règle, en la prolongeant **des deux côtés**.

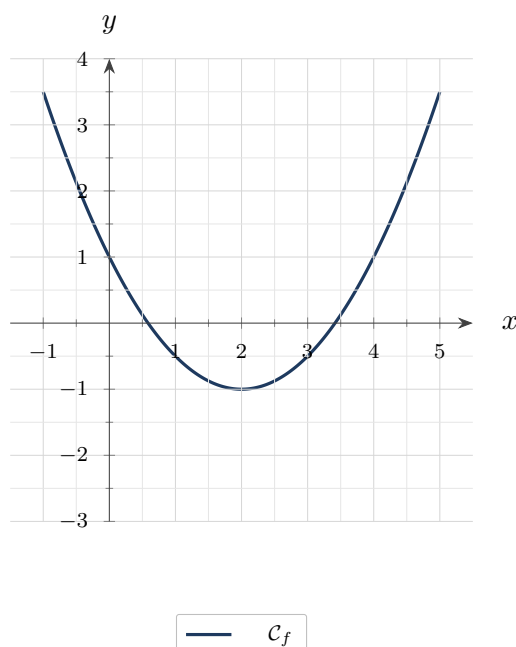
Une tangente n'est pas un petit segment collé à la courbe : c'est une droite entière, qui traverse le repère.

Exercice 8 — *Trois tangentes sur la même courbe*

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f , ainsi que trois nombres dérivés :

$$f'(0) = -2 \quad f'(2) = 0 \quad f'(4) = 2$$

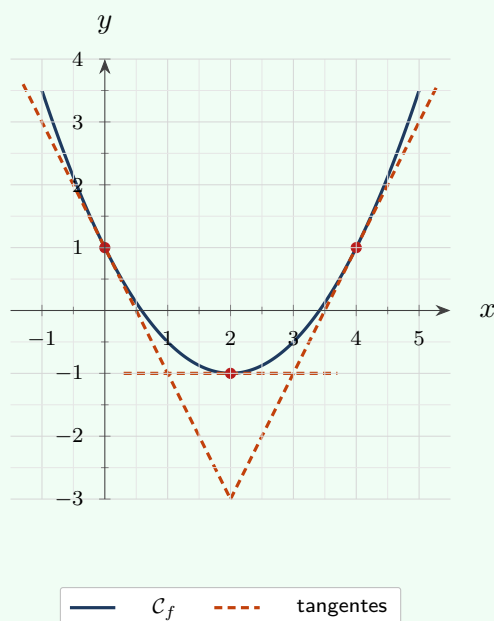
- Lire $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$, et placer les trois points de contact.
- Tracer les trois tangentes correspondantes, à la règle, en les prolongeant des deux côtés.



- Laquelle des trois tangentes est horizontale ? Que peut-on dire de la courbe en ce point ?

Correction de l'exercice 8

- a. $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ et $f(4) = 1$: les points de contact sont $(0; 1)$, $(2; -1)$ et $(4; 1)$.
 b. Depuis chaque point, on avance de 1 et l'on monte de $f'(a)$ — ou l'on descend quand $f'(a)$ est négatif.



- c. La tangente en $x = 2$ est **horizontale**. La courbe y atteint son point le plus bas : c'est le **sommet**, et f y passe de décroissante à croissante.

Conduite : exiger la règle et le prolongement des deux côtés. Un trait court collé à la courbe ne montre pas ce qu'est une tangente. Le repère est **à la même échelle** sur les deux axes : « avancer de 1, monter de $f'(a)$ » s'y lit directement.

Exercice 9 — *Le profil d'une pièce cintrée*

Un menuisier trace l'épure d'une **pièce cintrée** de porte. Le profil est modélisé, en décimètres, par une fonction h dont la courbe est donnée ci-dessous : l'ouverture mesure 10 dm et la flèche au milieu 5 dm. On donne $h'(2,5) = 1$ et $h'(5) = 0$.

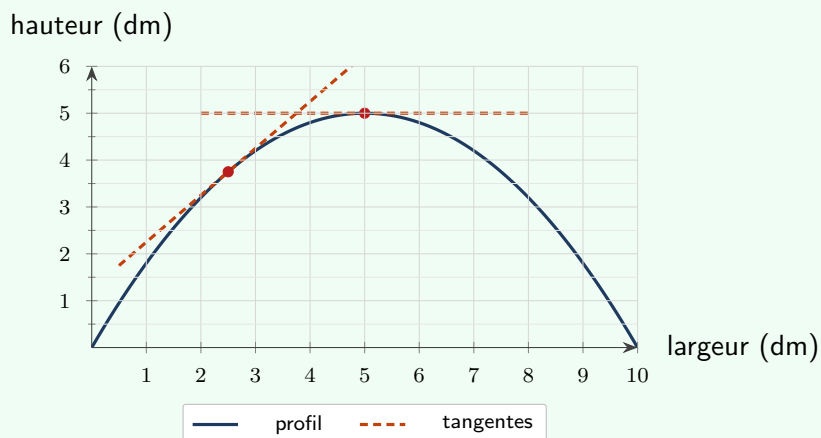


- Lire la hauteur du profil à 2,5 dm du bord.
- Tracer la tangente au profil en ce point, à la règle.
- Tracer la tangente au sommet. Comment est-elle ?
- Le menuisier doit poser une équerre contre le profil, exactement au sommet. Expliquer en une phrase ce que le nombre $h'(5) = 0$ lui garantit.

Correction de l'exercice 9

a. À 2,5 dm du bord, la hauteur vaut $h(2,5) = -0,2 \times 6,25 + 5 = -1,25 + 5 = 3,75$ dm, soit environ 37,5 cm. Sur le graphique, on lit entre 3,5 et 4.

b. et c. La tangente en 2,5 a pour pente 1 : depuis le point de contact, on avance de 1 et l'on monte de 1. Celle du sommet est **horizontale**.



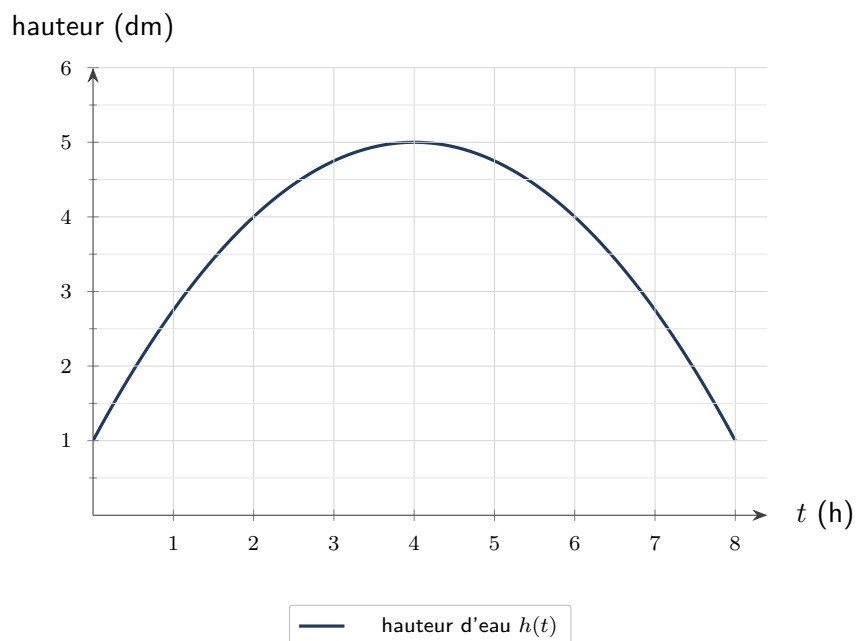
d. $h'(5) = 0$ signifie que la tangente au sommet est horizontale : le profil y est **à plat**. L'équerre posée au sommet repose donc bien à l'horizontale, et non sur une pente.

Réserve à énoncer : un chapeau de gendarme ou une anse de panier tracés à l'atelier ne sont pas exactement des paraboles. L'expression est un **modèle** qui sert à calculer des hauteurs et des pentes, pas la définition du tracé réel.

Exercice 10 — *Le récupérateur d'eau de pluie*

Un récupérateur d'eau de pluie se remplit pendant une averse, puis se vide par le robinet du jardin. La hauteur d'eau, en décimètres, est modélisée par une fonction h du temps t , en heures, sur $[0 ; 8]$. On donne

$$h'(2) = 1 \quad h'(4) = 0 \quad h'(6) = -1$$

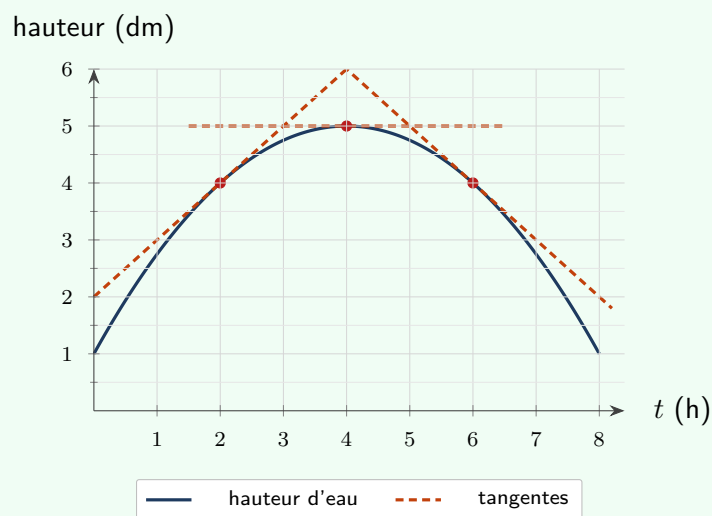


- Lire $h(2)$, $h(4)$ et $h(6)$, puis placer les trois points de contact.
- Tracer les trois tangentes correspondantes, à la règle.
- À quel instant la hauteur d'eau est-elle maximale ? Que vaut-elle alors ?
- Interpréter le signe de $h'(2)$ et celui de $h'(6)$ pour le récupérateur.

Correction de l'exercice 10

a. $h(2) = -1 + 4 + 1 = 4$ $h(4) = -4 + 8 + 1 = 5$ $h(6) = -9 + 12 + 1 = 4$, en décimètres. Les points de contact sont (2 ; 4), (4 ; 5) et (6 ; 4).

b. Depuis (2 ; 4) on avance de 1 et l'on monte de 1 ; la tangente en 4 est horizontale ; depuis (6 ; 4) on avance de 1 et l'on **descend** de 1.



c. La hauteur est maximale là où la tangente est horizontale, c'est-à-dire à $t = 4$ h : elle vaut alors 5 dm, soit 50 cm.

d. $h'(2) = 1 > 0$: la hauteur **augmente** d'un décimètre par heure, le récupérateur **se remplit**.
 $h'(6) = -1 < 0$: elle **diminue** d'un décimètre par heure, le récupérateur **se vide**.

À retenir : les deux tangentes de pentes 1 et -1 sont symétriques. C'est le **signe** qui distingue le remplissage de la vidange, pas la valeur.

C4 – Écrire l'équation réduite de la tangente en un point

Exigible. Prérequis : C2, C5 et le calcul d'une image.

Rappel de cours

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Trois calculs, toujours dans le même ordre : $f(a)$, puis $f'(a)$, puis le développement.

$f'(a)$ est la **pente** , $f(a)$ la **hauteur** : les échanger donne une droite qui ne touche même pas la courbe.

Tout près de a , la tangente et la courbe se confondent presque : c'est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de a .

Exercice 11 — Une première équation

On donne $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et le point A d'abscisse 2.

a. Calculer $f(2)$.

b. Calculer $f'(x)$, puis $f'(2)$.

c. Écrire l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point A .

d. Vérifier que le point A appartient bien à cette droite.

Correction de l'exercice 11

- a. $f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$.
 b. $f'(x) = 2x - 2$, donc $f'(2) = 4 - 2 = 2$.
 c. $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 2(x - 2) - 3 = 2x - 4 - 3$, soit $y = 2x - 7$.
 d. Pour $x = 2$: $y = 2 \times 2 - 7 = -3 = f(2)$. ✓ Le point $A(2; -3)$ est bien sur la droite.
 À retenir : le contrôle du d. se fait en dix secondes et détecte immédiatement une erreur de signe dans le développement. Le faire systématiquement.

Exercice 12 — Deux tangentes à la même courbe

On donne $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

- a. Calculer $g'(x)$.
 b. Écrire l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse $a = 1$.
 c. Écrire celle au point d'abscisse $a = 0$.
 d. Pour quelle valeur de a la tangente est-elle horizontale ? Justifier.

Correction de l'exercice 12

- a. $g'(x) = -4x + 3$.
 b. $g(1) = -2 + 3 + 4 = 5$ et $g'(1) = -4 + 3 = -1$.
 $y = -1(x - 1) + 5 = -x + 1 + 5$, soit $y = -x + 6$.
 c. $g(0) = 4$ et $g'(0) = 3$. $y = 3(x - 0) + 4$, soit $y = 3x + 4$.
 d. Une tangente est horizontale quand son coefficient directeur est nul : $g'(a) = 0$ donne $-4a + 3 = 0$, soit $a = \frac{3}{4} = 0,75$.

À retenir : en $a = 0$, l'équation de la tangente se simplifie — $x - 0$ vaut x — mais la méthode ne change pas. Et la valeur 0,75 trouvée au d. est l'abscisse du sommet de la parabole.

Exercice 13 — L'énergie produite par une installation photovoltaïque

Une installation photovoltaïque enregistre l'énergie produite depuis le lever du soleil. Sur les cinq premières heures, cette énergie cumulée, en kilowattheures, est modélisée par

$$E(t) = 0,3t^2$$

où t est le temps écoulé, en heures.

- a. Calculer l'énergie produite au bout de 3 heures.
 b. Calculer $E'(t)$, puis $E'(3)$. Sachant qu'une énergie en kWh dérivée par un temps en heures donne une **puissance** en kW, donner l'unité et interpréter.
 c. Écrire l'équation réduite de la tangente à la courbe de E au point d'abscisse 3.
 d. Estimer $E(3,2)$ à l'aide de la tangente, puis calculer la valeur exacte. Commenter l'écart.

Correction de l'exercice 13

a. $E(3) = 0,3 \times 9 = 2,7 \text{ kW h}$.

b. $E'(t) = 0,3 \times 2t = 0,6t$, donc $E'(3) = 1,8 \text{ kW}$. C'est la **puissance instantanée** fournie par l'installation à la troisième heure : à cet instant, elle produit $1,8 \text{ kW h}$ par heure.

c. $y = 1,8(t - 3) + 2,7 = 1,8t - 5,4 + 2,7$, soit $y = 1,8t - 2,7$.

d. Par la tangente : $y = 1,8 \times 3,2 - 2,7 = 5,76 - 2,7 = 3,06 \text{ kW h}$.

Valeur exacte : $E(3,2) = 0,3 \times 10,24 = 3,072 \text{ kW h}$.

L'écart vaut $0,012 \text{ kW h}$, soit moins de $0,4\%$: tout près de $t = 3$, la tangente remplace très bien la courbe. C'est la **meilleure approximation affine** de E au voisinage de 3.

Réserve à énoncer : ce modèle ne vaut que sur la **matinée** d'un jour dégagé, pendant que la puissance monte. Prolongé au-delà, il ferait croître la puissance sans fin, ce qui n'a pas de sens : le soleil redescend l'après-midi.

Exercice 14 — L'équation est donnée, que peut-on en tirer ?

La tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite

$$y = -2x + 11$$

a. En déduire $f'(3)$. Justifier.

b. En déduire $f(3)$. Justifier.

c. La fonction f est-elle croissante ou décroissante au voisinage de 3 ?

d. Un élève affirme : « puisque la tangente donne $y = 1$ pour $x = 5$, alors $f(5) = 1$ ». A-t-il raison ? Et pour $f(3,1)$, que peut-on dire ?

Correction de l'exercice 14

a. Le coefficient directeur de la tangente **est** le nombre dérivé : $f'(3) = -2$.

b. Le point de contact appartient à la tangente : pour $x = 3$, $y = -2 \times 3 + 11 = 5$. Donc $f(3) = 5$.

c. $f'(3) = -2 < 0$: f est **décroissante** au voisinage de 3.

d. **Non**. La tangente ne colle à la courbe que *tout près* du point de contact ; en $x = 5$, on en est loin et l'écart peut être important. En revanche $f(3,1) \approx -2 \times 3,1 + 11 = 4,8$ est une **bonne estimation**, parce que 3,1 est très proche de 3.

À **retenir** : l'approximation par la tangente est **locale**. Plus on s'éloigne du point de contact, moins elle vaut. Écrire $\approx$ et non $=$.

C5 – Utiliser les formules et règles de dérivation pour les polynômes de degré ≤ 2

Exigible. Formules à connaître. Prérequis : calcul littéral.

Rappel de cours

$f(x) = k$	$f(x) = ax + b$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = 0$	$f'(x) = a$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Deux règles, admises : $(kf)' = k f'$ et $(f + g)' = f' + g'$.

On dérive **chaque terme**, et le terme constant disparaît. La dérivée d'une fonction affine ne dépend plus de x ; celle de la fonction carré, si.

Exercice 15 — Six dérivées immédiates

Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = 4x - 9$ b. $g(x) = -6$ c. $h(x) = x^2$
 d. $k(x) = -3x$ e. $m(x) = 0,25x + 7$ f. $p(x) = 5x^2$

Correction de l'exercice 15

- a. $f'(x) = 4$ b. $g'(x) = 0$ c. $h'(x) = 2x$
 d. $k'(x) = -3$ e. $m'(x) = 0,25$ f. $p'(x) = 10x$

À retenir : seules les dérivées des fonctions contenant x^2 dépendent encore de x . Une fonction affine a une pente constante, donc une dérivée constante ; une constante a une dérivée **nulle**, pas égale à elle-même.

Au f. : $5x^2$ est $5 \times x^2$; on garde le 5 et l'on dérive x^2 : $5 \times 2x = 10x$.

Exercice 16 — Quatre sommes à dériver

Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en dérivant terme à terme.

- a. $f(x) = x^2 + 5x - 2$ b. $g(x) = -3x^2 + 2x + 8$
 c. $h(x) = 0,5x^2 - 4x$ d. $k(x) = -x^2 + 7$

Correction de l'exercice 16

- a. $f'(x) = 2x + 5$ b. $g'(x) = -6x + 2$
 c. $h'(x) = x - 4$ d. $k'(x) = -2x$

Détail du c. : $0,5x^2$ donne $0,5 \times 2x = x$; $-4x$ donne -4 . D'où $h'(x) = x - 4$.

Erreur fréquente : garder le terme constant. Dans le d., le **+7 disparaît** : la dérivée est $-2x$, pas $-2x + 7$.

Exercice 17 — Le freinage d'un véhicule

Un véhicule freine. La distance parcourue depuis le début du freinage, en mètres, est modélisée par

$$d(t) = 15t - 0,75t^2$$

où t est le temps écoulé, en secondes, sur $[0 ; 10]$.

- a. Calculer $d'(t)$. Cette dérivée est la **vitesse** du véhicule, en mètres par seconde.
 b. Calculer $d'(0)$, $d'(4)$ et $d'(10)$.
 c. De combien la vitesse diminue-t-elle à chaque seconde ? Justifier à partir de l'expression de d' .
 d. À quel instant le véhicule est-il arrêté ? Quelle distance a-t-il alors parcourue depuis le début du freinage ?

Correction de l'exercice 17

- a. $d'(t) = 15 - 1,5t$.
 b. $d'(0) = 15 \text{ m/s}$ $d'(4) = 15 - 6 = 9 \text{ m/s}$ $d'(10) = 15 - 15 = 0 \text{ m/s}$.
 c. d' est une fonction affine de coefficient directeur $-1,5$: la vitesse perd $1,5 \text{ m/s}$ à chaque seconde. Le freinage est **régulier**.
 d. Le véhicule est arrêté quand sa vitesse est nulle, c'est-à-dire pour $d'(t) = 0$: $15 - 1,5t = 0$ donne $t = 10 \text{ s}$.

Il a alors parcouru $d(10) = 150 - 0,75 \times 100 = 150 - 75 = 75 \text{ m}$.

Lecture : 15 m/s , c'est 54 km/h . Une distance d'arrêt de 75 m à cette vitesse est longue — et le temps de réaction du conducteur, avant le freinage, n'y est même pas compté.

Réserve à énoncer : le modèle ne vaut que sur $[0 ; 10]$. Au-delà, d **diminuerait**, ce qui reviendrait à faire reculer le véhicule : l'expression n'a plus de sens une fois l'arrêt atteint.

Exercice 18 — La concentration d'un médicament

Après la prise d'un comprimé, la concentration d'un médicament dans le sang, en milligrammes par litre, est modélisée sur $[0; 6]$ par

$$C(t) = -0,8t^2 + 4,8t$$

où t est le temps écoulé, en heures.

- Calculer $C(1)$ et $C(3)$.
- Calculer $C'(t)$.
- Calculer $C'(1)$, $C'(3)$ et $C'(5)$. L'unité de ces nombres est le milligramme par litre *et* par heure.
- Interpréter chacun des trois signes obtenus pour le patient.

Correction de l'exercice 18

- $C(1) = -0,8 + 4,8 = 4 \text{ mg/L}$ $C(3) = -7,2 + 14,4 = 7,2 \text{ mg/L}$.
- $C'(t) = -1,6t + 4,8$.
- $C'(1) = -1,6 + 4,8 = 3,2$ $C'(3) = -4,8 + 4,8 = 0$ $C'(5) = -8 + 4,8 = -3,2$, en mg/L par heure.
- $C'(1) > 0$: au bout d'une heure, la concentration **augmente** encore — le médicament passe dans le sang. $C'(3) = 0$: la concentration **cesse d'augmenter**, elle atteint son maximum, 7,2 mg/L. $C'(5) < 0$: elle **diminue** — l'organisme élimine le médicament.

Réserve à énoncer : une courbe de concentration réelle monte vite puis décroît lentement ; elle n'est pas symétrique et ne s'annule pas net à $t = 6$. Cette parabole est un **modèle simplifié** fourni pour l'exercice. Aucune conclusion de dosage ne s'en déduit.

Exercice 19 — Retrouver un coefficient

- On cherche le nombre a tel que la fonction $f(x) = ax^2 - 6x + 1$ vérifie $f'(3) = 0$. Calculer d'abord $f'(x)$ en fonction de a , puis résoudre.
- Avec la valeur trouvée, que représente $x = 3$ pour la courbe de f ?
- De même, trouver b tel que $g(x) = 2x^2 + bx$ vérifie $g'(1) = 0$.

Correction de l'exercice 19

- $f'(x) = 2ax - 6$. $f'(3) = 0$ donne $6a - 6 = 0$, soit **a = 1**.
- Avec $a = 1$, $f(x) = x^2 - 6x + 1$ et $f'(x) = 2x - 6$, qui s'annule en 3 en **changeant de signe** (négatif avant, positif après). La courbe y atteint son **minimum** : $x = 3$ est l'abscisse du **sommet**.
- $g'(x) = 4x + b$. $g'(1) = 0$ donne $4 + b = 0$, soit **b = -4**.

Méthode : on dérive avec la lettre, puis on remplace x par la valeur donnée. L'équation obtenue est du premier degré : elle se résout comme d'habitude.

C6 – Étudier les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée

Exigible. Prérequis : C5, signe d'une fonction affine.

Rappel de cours

Sur un intervalle : $f' > 0$ donne f **croissante** ; $f' < 0$ donne f **décroissante** ; $f' = 0$ sur tout l'intervalle donne f **constante**.

Marche à suivre : dériver, résoudre $f'(x) = 0$, puis donner le signe de f' **avant** et **après** cette valeur — f' est affine, son signe se lit sur son coefficient directeur.

C'est le signe de f' qui décide, jamais celui de f : une fonction peut être négative et croissante.

Exercice 20 — Dériver, annuler, conclure

On donne $f(x) = x^2 - 10x + 21$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

- Calculer $f'(x)$.
- Résoudre $f'(x) = 0$.
- Donner le signe de $f'(x)$ avant et après cette valeur. Justifier par le coefficient directeur de f' .
- En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 8]$, en précisant les intervalles.

Correction de l'exercice 20

- $f'(x) = 2x - 10$.
- $2x - 10 = 0$ donne $x = 5$.
- f' est une fonction affine de coefficient directeur $2 > 0$: elle est donc **négative** avant 5 et **positive** après.
- f est **décroissante** sur $[0 ; 5]$, puis **croissante** sur $[5 ; 8]$.

Contrôle : $f(0) = 21$, $f(5) = 25 - 50 + 21 = -4$, $f(8) = 64 - 80 + 21 = 5$. La fonction descend de 21 à -4, puis remonte à 5. ✓

Erreur fréquente : conclure « f' est négative donc f est négative ». C'est le **sens de variation** que le signe de f' donne, pas le signe de f .

Exercice 21 — La cadence de pédalage d'un cycliste

Sur un banc de test, on mesure la puissance développée par un cycliste selon sa **cadence de pédalage**. Les mesures sont modélisées, en watts, par

$$P(c) = -0,05c^2 + 8c - 100$$

où c est la cadence en tours par minute, sur $[40 ; 120]$.

- Calculer la puissance développée à $c = 40$ tr/min et à $c = 120$ tr/min.
- Calculer $P'(c)$, puis résoudre $P'(c) = 0$.
- Étudier le signe de P' et en déduire le sens de variation de P .
- Quelle cadence le cycliste a-t-il intérêt à adopter ? Quelle puissance développe-t-il alors ?

Correction de l'exercice 21

a. $P(40) = -0,05 \times 1600 + 320 - 100 = -80 + 320 - 100 = 140$ W.

$P(120) = -0,05 \times 14\,400 + 960 - 100 = -720 + 960 - 100 = 140$ W.

b. $P'(c) = -0,1c + 8$. $-0,1c + 8 = 0$ donne $c = \frac{8}{0,1} = 80$ tr/min.

c. P' est affine de coefficient directeur $-0,1 < 0$: elle est **positive** avant 80 et **négative** après. Donc P est **croissante** sur $[40 ; 80]$ puis **décroissante** sur $[80 ; 120]$.

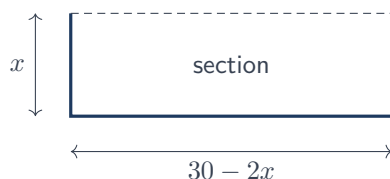
d. La puissance est maximale pour une cadence de 80 tr/min, et vaut alors $P(80) = -0,05 \times 6400 + 640 - 100 = -320 + 640 - 100 = 220$ W.

Lecture : pédaler trop lentement en forçant sur les jambes, ou trop vite « dans le vide », donne la même puissance — 140 W aux deux extrémités. Entre les deux, il existe bien une cadence plus efficace.

Réserve à énoncer : cette expression est un **modèle ajusté** sur les mesures d'un cycliste donné, sur la plage testée. La cadence la plus efficace dépend de l'athlète et de l'effort ; hors de $[40 ; 120]$, l'expression donnerait des valeurs sans signification.

Exercice 22 — La section d'une gouttière

Une bande de tôle de 30 cm de large est pliée pour former une gouttière de section rectangulaire, comme sur le schéma. On relève les deux bords d'une hauteur x , en centimètres.



- Expliquer pourquoi le fond de la gouttière mesure $30 - 2x$ centimètres.
- Montrer que l'aire de la section, en cm^2 , est $A(x) = -2x^2 + 30x$.
- Calculer $A'(x)$, résoudre $A'(x) = 0$ et étudier le signe de A' sur $[0; 15]$.
- Quelle hauteur de pliage donne la plus grande section ? Quelle est alors cette aire ?

Correction de l'exercice 22

- La tôle mesure 30 cm de large. On en relève x d'un côté et x de l'autre : il reste $30 - x - x = 30 - 2x$ centimètres pour le fond.
- La section est un rectangle de hauteur x et de largeur $30 - 2x$:

$$A(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2 = -2x^2 + 30x$$

- $A'(x) = -4x + 30$. $-4x + 30 = 0$ donne $x = \frac{30}{4} = 7,5$ cm.

A' est affine de coefficient directeur $-4 < 0$: **positive** avant 7,5, **négative** après. A est donc croissante puis décroissante.

- La section est maximale pour un pliage de $x = 7,5$ cm, et vaut alors $A(7,5) = 7,5 \times (30 - 15) = 7,5 \times 15 = 112,5 \text{ cm}^2$.

Contrôle : $A(7) = 7 \times 16 = 112 \text{ cm}^2$ et $A(8) = 8 \times 14 = 112 \text{ cm}^2$, deux valeurs inférieures à 112,5. ✓

À faire remarquer : le fond mesure alors $30 - 15 = 15$ cm, soit exactement le double de la hauteur. Le résultat ne se devine pas : c'est la dérivée qui le donne.

Exercice 23 — Quand la dérivée ne s'annule pas

On donne $f(x) = x^2 + 4x + 7$ sur l'intervalle $[-1; 3]$.

- Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$.
- La solution trouvée appartient-elle à l'intervalle d'étude ?
- Calculer $f'(-1)$ et $f'(3)$. Quel est le signe de f' sur tout l'intervalle $[-1; 3]$?
- En déduire le sens de variation de f sur $[-1; 3]$.

Correction de l'exercice 23

- $f'(x) = 2x + 4$, qui s'annule pour $x = -2$.

- Non** : -2 n'appartient pas à $[-1; 3]$.

- $f'(-1) = -2 + 4 = 2 > 0$ et $f'(3) = 6 + 4 = 10 > 0$. Comme f' est affine croissante et qu'elle est déjà positive à la borne gauche, elle reste **positive sur tout l'intervalle**.

- f est **croissante sur $[-1; 3]$ tout entier**. Elle n'a ni maximum ni minimum à l'intérieur de l'intervalle.

Contrôle : $f(-1) = 1 - 4 + 7 = 4$ et $f(3) = 9 + 12 + 7 = 28$. La fonction monte de 4 à 28. ✓

À retenir : la valeur qui annule la dérivée ne sert que si elle est **dans l'intervalle d'étude**. Sinon, le sens de variation ne change pas, et les extremums sont aux **bornes**.

C8 – Dresser le tableau de variations

Exigible. Prérequis : C6. Un tableau porte des nombres, pas seulement des flèches.

Rappel de cours

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ et étudier son signe.
3. Reporter ce signe dans la ligne $f'(x)$.
4. Traduire par des flèches dans la ligne $f(x)$.

Calculer les valeurs **aux deux bornes** de l'intervalle et à l'**extremum**, et les écrire dans le tableau.

La ligne du haut porte l'intervalle d'étude : rien ne s'écrit en dehors.

Exercice 24 — Un tableau complet, pas à pas

On donne $f(x) = x^2 - 8x + 12$ sur l'intervalle $[0; 7]$.

- a. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$.
- b. Donner le signe de f' sur $[0; 7]$.
- c. Calculer $f(0)$, $f(4)$ et $f(7)$.
- d. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0; 7]$, en y portant les trois valeurs calculées.

Correction de l'exercice 24

- a. $f'(x) = 2x - 8$, qui s'annule pour $x = 4$.
- b. f' est affine de coefficient directeur $2 > 0$: **négative** sur $[0; 4]$, **positive** sur $[4; 7]$.
- c. $f(0) = 12$ $f(4) = 16 - 32 + 12 = -4$ $f(7) = 49 - 56 + 12 = 5$.
- d.

x	0	4	7
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	12	5	
		↘	↗
		−4	

À retenir : le tableau porte des **nombres** — 12, –4 et 5 — et pas seulement des flèches. Sans eux, il ne dit ni de combien la fonction descend, ni jusqu'où elle remonte.

Exercice 25 — Une parabole tournée vers le bas

On donne $g(x) = -2x^2 + 8x + 1$ sur l'intervalle $[0; 5]$.

- a. Calculer $g'(x)$ et résoudre $g'(x) = 0$.
- b. Donner le signe de g' sur $[0; 5]$. Attention au coefficient directeur.
- c. Calculer $g(0)$, $g(2)$ et $g(5)$.
- d. Dresser le tableau de variations complet de g sur $[0; 5]$.

Correction de l'exercice 25

- a. $g'(x) = -4x + 8$, qui s'annule pour $x = 2$.
 b. g' est affine de coefficient directeur $-4 < 0$: elle est donc **positive** sur $[0 ; 2]$ puis **négative** sur $[2 ; 5]$ — l'inverse de l'exercice précédent.
 c. $g(0) = 1$ $g(2) = -8 + 16 + 1 = 9$ $g(5) = -50 + 40 + 1 = -9$.
 d.

x	0	2	5
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		9	
		↗	↘
	1		-9

Erreur fréquente : recopier le tableau de l'exercice 24. Ici le coefficient de x^2 est **négatif** : la fonction monte puis descend, et la valeur 9 s'écrit **en haut** du tableau.

Exercice 26 — La température d'une serre bioclimatique

Dans une serre bioclimatique, la température intérieure est relevée toutes les heures. Elle est modélisée, en degrés Celsius, par

$$T(t) = -0,2t^2 + 5,2t - 13,8$$

où t est l'heure de la journée, sur $[6 ; 20]$.

- a. Calculer $T'(t)$ et résoudre $T'(t) = 0$.
 b. Donner le signe de T' et en déduire le sens de variation de la température.
 c. Calculer $T(6)$, $T(13)$ et $T(20)$.
 d. Dresser le tableau de variations, puis répondre : à quelle heure fait-il le plus chaud dans la serre, et quelle température y règne-t-il alors ?

Correction de l'exercice 26

- a. $T'(t) = -0,4t + 5,2$. $-0,4t + 5,2 = 0$ donne $t = \frac{5,2}{0,4} = 13$, soit **13 heures**.
 b. T' est affine de coefficient directeur $-0,4 < 0$: **positive** avant 13 h, **négative** après. La température **monte** le matin puis **descend** l'après-midi.
 c. $T(6) = -7,2 + 31,2 - 13,8 = 10,2^\circ\text{C}$ $T(13) = -33,8 + 67,6 - 13,8 = 20^\circ\text{C}$ $T(20) = -80 + 104 - 13,8 = 10,2^\circ\text{C}$.
 d.

t	6	13	20
$T'(t)$		+	0 -
$T(t)$		20	
		↗	↘
	10,2		10,2

Il fait le plus chaud à **13 heures**, avec 20°C .

Lecture : la serre revient à $10,2^\circ\text{C}$ le soir, sa température du matin. Le modèle est symétrique autour de 13 h.

Réserve à énoncer : une température réelle ne redescend pas exactement comme elle est montée — l'inertie des murs et du sol décale le maximum en début d'après-midi. Cette expression est un **modèle fourni**, ajusté sur une journée ensoleillée.

C7 – Déterminer un extremum à partir du sens de variation

Exigible. Prérequis : C6, C8. Toujours vérifier l'intervalle d'étude.

Rappel de cours

Un **extremum local** est une valeur plus grande (ou plus petite) que celles obtenues *juste autour*. Un **extremum global** est la plus grande (ou la plus petite) valeur sur *tout* l'intervalle.

L'extremum se lit sur le **changement de signe** de f' — mais il peut aussi se trouver à une **borne**, là où f' ne s'annule pas. Il faut donc toujours calculer les valeurs aux bornes.

Et une dérivée qui s'annule ne donne pas *toujours* un extremum : il faut que le signe **change**.

Exercice 27 — L'extremum est-il dans l'intervalle ?

On donne $f(x) = x^2 - 6x + 11$ sur l'intervalle $[0; 2]$.

- Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$.
- La valeur trouvée appartient-elle à $[0; 2]$?
- Déterminer le signe de f' sur $[0; 2]$, puis le sens de variation de f .
- En déduire le maximum et le minimum de f sur $[0; 2]$, en précisant où ils sont atteints.

Correction de l'exercice 27

- $f'(x) = 2x - 6$, qui s'annule pour $x = 3$.
- Non** : 3 n'appartient pas à $[0; 2]$.
- Sur $[0; 2]$, $x \leq 2$ donc $2x \leq 4$ et $f'(x) \leq -2 < 0$: la dérivée est **négative** sur tout l'intervalle. f est donc **décroissante** sur $[0; 2]$.

d. Une fonction décroissante est la plus grande à gauche et la plus petite à droite :

maximum $f(0) = 11$, atteint en $x = 0$; **minimum** $f(2) = 4 - 12 + 11 = 3$, atteint en $x = 2$.

Les deux extremums sont **aux bornes**.

Erreur fréquente : répondre « le minimum est en $x = 3$ » par automatisme. La valeur qui annule la dérivée n'est pas dans l'intervalle d'étude : elle ne répond pas à la question posée.

Exercice 28 — Le ballon envoyé en cloche

Au handball, une joueuse envoie le ballon en cloche. La hauteur du ballon, en mètres, est modélisée par

$$h(t) = -5t^2 + 12t + 1$$

où t est le temps écoulé depuis le lancer, en secondes, sur $[0; 2,4]$.

- À quelle hauteur le ballon est-il lâché ?
- Calculer $h'(t)$ et résoudre $h'(t) = 0$.
- Dresser le tableau de variations de h sur $[0; 2,4]$.
- Quelle est la hauteur maximale atteinte, et à quel instant ? S'agit-il d'un extremum local ou global sur l'intervalle d'étude ?

Correction de l'exercice 28

a. Au lancer, $t = 0$: $h(0) = 1$ m.

b. $h'(t) = -10t + 12$. $-10t + 12 = 0$ donne $t = \frac{12}{10} = 1,2$ s.

c. h' est affine de coefficient directeur $-10 < 0$: positive avant 1,2, négative après. $h(1,2) = -5 \times 1,44 + 14,4 + 1 = -7,2 + 15,4 = 8,2$ et $h(2,4) = -28,8 + 28,8 + 1 = 1$.

t	0	1,2	2,4
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	1	8,2	1

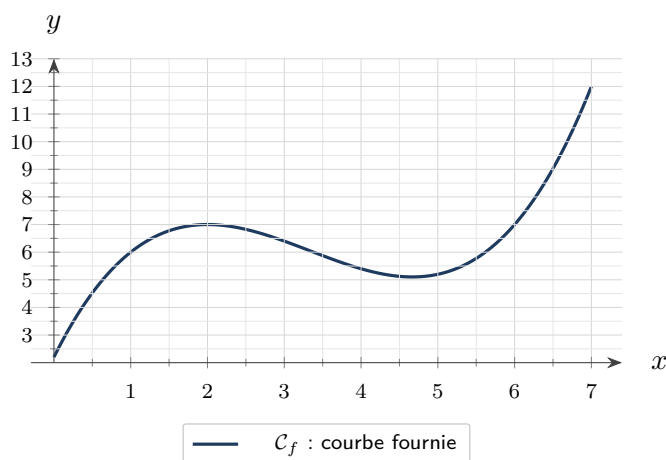
d. Le ballon monte jusqu'à 8,2 m, atteints à $t = 1,2$ s. C'est un extremum **global** sur $[0 ; 2,4]$: aucune autre valeur du tableau ne dépasse 8,2.

Lecture : le ballon revient à 1 m au bout de 2,4 s, la hauteur d'où il est parti — c'est la hauteur des mains de la joueuse.

Réserve à énoncer : le modèle néglige la résistance de l'air. Il décrit correctement une trajectoire verticale de quelques secondes, pas un tir tendu ni un ballon avec effet.

Exercice 29 — Local ou global ?

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7]$. Elle est **fournie** : on ne cherche pas son expression.



a. En quelle abscisse la courbe présente-t-elle un **maximum local** ? Que vaut ce maximum ?

b. Quelle est la plus grande valeur prise par f sur $[0 ; 7]$? En quelle abscisse est-elle atteinte ?

c. Un élève affirme : « le maximum se trouve toujours là où la tangente est horizontale ». Expliquer pourquoi c'est faux ici.

d. Deux endroits peuvent donner la plus petite valeur : le creux de la courbe et la borne gauche. Lire les deux, puis dire où se trouve le **minimum** de f sur $[0 ; 7]$.

Correction de l'exercice 29

a. En $x = 2$: la courbe monte puis redescend, la tangente y serait horizontale. C'est un **maximum local**, qui vaut $f(2) = 7$.

b. La plus grande valeur sur $[0; 7]$ est **12**, atteinte en $x = 7$, c'est-à-dire à la **borne droite** de l'intervalle. C'est le **maximum global**.

c. Parce que le maximum global est ici **au bord** de l'intervalle, là où la tangente n'est pas horizontale : la courbe y monte encore quand l'étude s'arrête. Chercher seulement les tangentes horizontales aurait donné 7 au lieu de 12.

d. Le creux de la courbe se lit vers $x \approx 4,7$, où $f(x) \approx 5$. À la borne gauche, $f(0) \approx 2$. La plus petite des deux est celle du bord : le **minimum** de f sur $[0; 7]$ est atteint en $x = 0$, et vaut environ **2**.

Le creux n'est donc qu'un **minimum local** : il est plus bas que ses voisins immédiats, mais pas plus bas que tout l'intervalle.

À **retenir** : on calcule **toujours** les valeurs aux deux bornes avant de conclure. Un extremum global peut se trouver là où la dérivée ne s'annule pas.

Note : cette courbe est donnée, non dérivée — son expression n'est pas au programme de ce module. Le raisonnement se conduit entièrement par lecture graphique.

C9 – Étudier la fonction inverse : dérivée, variations, représentation graphique

Exigible. Prérequis : calcul avec les inverses, C4.

Rappel de cours

La fonction inverse est $f(x) = \frac{1}{x}$, définie pour tout $x \neq 0$. Sa courbe est une **hyperbole**, en deux branches.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Un carré est toujours positif : f' est toujours **négative**. La fonction inverse est donc **décroissante sur chacune des deux branches** — et non sur $\mathbb{R}$, puisque $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

La pente s'**aplatit** quand x grandit : c'est ce qui fait que les gains s'écrasent dans les situations modélisées par cette fonction.

Exercice 30 — Images, dérivées, signes

On donne la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$, définie pour tout $x \neq 0$.

a. Calculer $f(0,5)$, $f(2)$ et $f(5)$.

b. Donner $f'(x)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(5)$. Quel est leur signe ? Que devient la pente quand x grandit ?

d. Un élève écrit : « la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$ ». Montrer que c'est faux en calculant $f(-1)$ et $f(1)$, puis écrire la phrase correcte.

Correction de l'exercice 30

a. $f(0,5) = \frac{1}{0,5} = 2$ $f(2) = 0,5$ $f(5) = 0,2$.

b. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

c. $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$ et $f'(5) = -\frac{1}{25} = -0,04$. Les deux sont **négatifs** : la fonction décroît. La pente **s'aplatit** quand x grandit — $-0,04$ est beaucoup plus proche de 0 que $-0,25$.

d. $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$: entre -1 et 1 , la fonction a **augmenté**. Elle ne peut donc pas être décroissante sur $\mathbb{R}$.

Phrase correcte : la fonction inverse est **décroissante sur** $] -\infty ; 0[$ **et décroissante sur** $]0 ; +\infty[$, mais pas sur leur réunion.

À retenir : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ est négative pour tout $x \neq 0$ parce qu'un carré est toujours positif. C'est le **zéro** qui sépare les deux branches, et la double barre du tableau de variations qui le signale.

Exercice 31 — La pression sous un patin

Un menuisier serre une pièce de bois avec un serre-joint. Le patin transmet une force pressante de 600 N. La pression exercée sur le bois, en newtons par centimètre carré, vaut

$$p(S) = \frac{600}{S}$$

où S est l'aire du patin, en centimètres carrés. Un patin trop petit marque le bois.

a. Calculer la pression pour un patin de 5 cm^2 , puis de 10 cm^2 , puis de 20 cm^2 .

b. La fonction p est un multiple de la fonction inverse. En déduire $p'(S)$.

c. Calculer $p'(10)$ et $p'(20)$. Quel est leur signe ? Qu'est-ce que cela dit au menuisier ?

d. Le menuisier hésite entre agrandir le patin de 5 à 10 cm^2 ou de 15 à 20 cm^2 . Quel changement fait le plus baisser la pression ? Justifier par les calculs du a.

Correction de l'exercice 31

a. $p(5) = \frac{600}{5} = 120 \text{ N/cm}^2$ $p(10) = 60 \text{ N/cm}^2$ $p(20) = 30 \text{ N/cm}^2$.

b. $p(S) = 600 \times \frac{1}{S}$, donc $p'(S) = 600 \times \left(-\frac{1}{S^2}\right) = -\frac{600}{S^2}$.

c. $p'(10) = -\frac{600}{100} = -6$ et $p'(20) = -\frac{600}{400} = -1,5$, en newtons par centimètre carré *et* par centimètre carré d'agrandissement. Les deux sont **négatifs** : agrandir le patin **fait baisser** la pression. Mais le gain s'écrase — à partir d'un grand patin, l'agrandir encore ne change presque plus rien.

d. De 5 à 10 cm^2 : la pression passe de 120 à 60 , soit -60 N/cm^2 . De 15 à 20 cm^2 : $p(15) = 40$ et $p(20) = 30$, soit seulement -10 N/cm^2 . Le **premier** changement est de loin le plus efficace, alors que les deux agrandissent le patin de la même quantité.

Réserve à énoncer : la relation $p = \frac{F}{S}$ suppose la force **uniformément répartie** sur toute la surface du patin. Un patin mal à plat, ou un bois irrégulier, concentre la pression sur une zone plus petite : c'est justement ce qui marque le bois.

Exercice 32 — Une tangente à l'hyperbole

On reprend la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ et le point A de son hyperbole d'abscisse 4.

a. Calculer $f(4)$.

b. Calculer $f'(4)$.

c. Écrire l'équation réduite de la tangente à l'hyperbole au point A .

d. Vérifier que le point A appartient à cette droite. La tangente monte-t-elle ou descend-elle ?

Correction de l'exercice 32

a. $f(4) = \frac{1}{4} = 0,25$.

b. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(4) = -\frac{1}{16} = -0,0625$.

c. $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = -0,0625(x - 4) + 0,25 = -0,0625x + 0,25 + 0,25$, soit

$$y = -0,0625x + 0,5$$

d. Pour $x = 4$: $y = -0,25 + 0,5 = 0,25 = f(4)$. ✓ Le point $A(4; 0,25)$ est bien sur la droite. Comme $f'(4) < 0$, la tangente **descend**.

À retenir : la méthode est exactement la même que pour une parabole — $f(a)$, puis $f'(a)$, puis $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Seule la formule de la dérivée change.