

Version professeur

**Mathématiques – Première Bac Pro****Cours et applications****Chapitre 5****Fonctions polynômes de degré 2**

Édition : 17 septembre 2026 – Naïm Azzouz

**Rappel de cours — Avant de commencer**

Pour aborder ce chapitre, il faut savoir calculer l'image d'un nombre par une fonction dont l'expression est donnée, développer un produit de deux facteurs et lire des coordonnées dans un repère. La calculatrice est autorisée ; règle et crayon de couleur sont nécessaires.

**Repères et ordre de travail**

Les codes désignent les capacités du chapitre, pas des codes officiels.

| Capacité et intitulé complet                                       | Partie du cours | Page         |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------|
| C1 – Visualiser sur la courbe le nombre de solutions de $f(x) = 0$ | §1              | 3<br>él. 2   |
| C3 – Associer une parabole à une expression de degré 2             | §2              | 4<br>él. 3   |
| C4 – Tester si un nombre réel est racine d'un polynôme de degré 2  | §3              | 5<br>él. 4   |
| C6 – La forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ et ses racines      | §4              | 5<br>él. 4   |
| C2 et C3 – Sommet et axe de symétrie : le milieu des racines       | §5              | 6<br>él. 5   |
| C2 – Donner l'allure de la parabole d'une forme factorisée         | §6              | 7<br>él. 6   |
| C6 – Le signe d'un polynôme sous forme factorisée                  | §7              | 8<br>él. 7   |
| C5 – Factoriser un polynôme dont les racines sont connues          | §8              | 9<br>él. 8   |
| C7 – La deuxième solution lorsqu'une solution est connue           | §9              | 10<br>él. 9  |
| C1 à C3 – Conjecturer à l'outil numérique, encadrer par balayage   | §10             | 10<br>él. 10 |
| C4 et C6 – Bivalence : la puissance dans un circuit électrique     | §11             | 12<br>él. 11 |

« él. » : page du cours élève de cette même édition.

**Méthode — Mode d'emploi**

Lire la notion et l'exemple résolu, puis chercher l'application avant de passer à la notion suivante. Le travail peut être accompagné en classe ou repris seul. Les corrections suivent les applications dans cette version.

Les parties se lisent dans l'ordre. Tout le chapitre repose sur la **forme factorisée**  $a(x - x_1)(x - x_2)$  : c'est elle qui donne les racines, le signe et l'allure de la courbe. Le calcul des racines par le discriminant **n'est pas au programme** de ce module et n'apparaît nulle part dans ce cours.

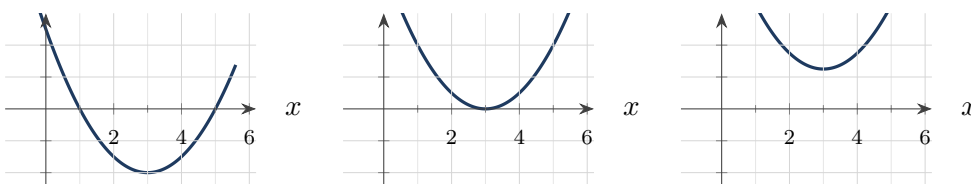
# 1 Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? (C1)

Une **fonction polynôme de degré 2** s'écrit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ . Sa représentation graphique s'appelle une **parabole**.

## Définition — Racine d'un polynôme de degré 2

Une **racine** de  $f$  est un nombre  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Sur le graphique, les racines sont les **abscisses des points où la parabole coupe l'axe horizontal**.

Le nombre de solutions de  $f(x) = 0$  se lit donc directement sur la courbe : il suffit de compter les points de rencontre avec l'axe des abscisses.



Deux points de rencontre : deux solutions.    ■    Un seul point : une solution, dite *racine double*.    ■    Aucun point : aucune solution.

## Proposition — Les trois cas possibles (admis)

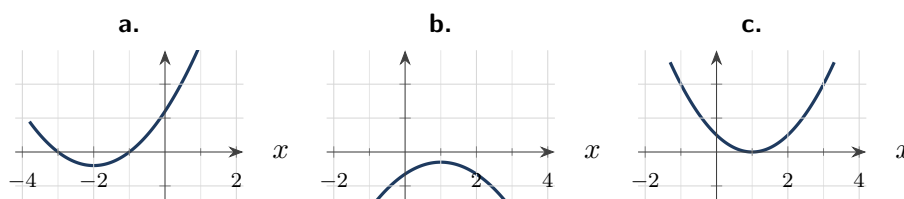
Une équation  $f(x) = 0$ , avec  $f$  polynôme de degré 2, admet **deux solutions**, **une seule solution** ou **aucune solution**. Il n'y en a jamais trois.

## Erreur fréquente — Compter les points de rencontre, pas les branches

La parabole a toujours deux branches. Ce ne sont pas elles qu'on compte : on compte les points où la courbe **touche ou traverse** l'axe des abscisses.

## Application 1 – Lire le nombre de solutions

Trois paraboles sont tracées ci-dessous.



- Pour chacune, donner le nombre de solutions de  $f(x) = 0$ .
- Lire les solutions lorsqu'elles se lisent sur une graduation.

## Correction — Application 1

**a.** Courbe a. : **deux** solutions.    Courbe b. : **aucune** solution — la parabole reste entièrement en dessous de l'axe.    Courbe c. : **une** solution, c'est une racine double.

**b.** Courbe a. :  $x = -3$  et  $x = -1$ .    Courbe b. : rien à lire.    Courbe c. :  $x = 1$ .

*Conduite* : faire dire « la courbe b. ne coupe pas l'axe » avant d'écrire « aucune solution ». C'est la lecture qui décide, pas un calcul.

## 2 Associer une parabole à une expression (C3)

Trois renseignements se lisent sur l'expression et se retrouvent sur la courbe. Ils suffisent presque toujours à apparier une parabole et une expression.

### Proposition — Trois éléments caractéristiques (admis)

Pour  $f(x) = ax^2 + bx + c$  :

1. **Le signe de  $a$**  donne le sens de la courbure. Si  $a > 0$ , la parabole est tournée **vers le haut** ; si  $a < 0$ , **vers le bas**.
2. **L'ordonnée à l'origine** vaut  $f(0) = c$  : c'est la hauteur à laquelle la courbe coupe l'axe vertical.
3. **Les racines**, quand elles existent, sont les abscisses des points de rencontre avec l'axe horizontal.

### Exemple — Apparier trois courbes et trois expressions

$$f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = -x^2 + 4, \quad h(x) = x^2 + 1.$$

$f$  :  $a = 1 > 0$ , courbe vers le haut, coupe l'axe vertical en  $-4$ .

$g$  :  $a = -1 < 0$ , courbe vers le bas, coupe l'axe vertical en  $+4$ .

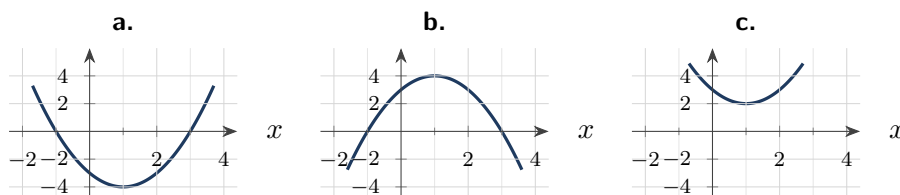
$h$  :  $a = 1 > 0$ , coupe l'axe vertical en  $+1$  et ne rencontre jamais l'axe horizontal, puisque  $x^2 + 1$  est toujours au moins égal à 1.

### Erreur fréquente — Le signe de $a$ n'est pas le signe de la courbe

$a > 0$  ne veut pas dire « la courbe est au-dessus de l'axe ». La parabole de  $f(x) = x^2 - 4$  est tournée vers le haut et pourtant négative entre  $-2$  et  $2$ .

### Application 2 – Relier chaque courbe à son expression

Associer chacune des trois courbes ci-dessous à l'une des expressions  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ ,  $h(x) = x^2 - 2x + 3$ , en justifiant par le signe de  $a$  puis par l'ordonnée à l'origine.



### Correction — Application 2

Courbe **b.** est la seule tournée vers le bas : c'est  $g$ , la seule dont  $a = -1 < 0$ .

Restent  $f$  et  $h$ , toutes deux tournées vers le haut. On les sépare par l'ordonnée à l'origine : la courbe **a.** coupe l'axe vertical en  $-3$ , c'est  $f$  ; la courbe **c.** le coupe en  $+3$ , c'est  $h$ .

**Contrôle** :  $h$  ne rencontre pas l'axe horizontal, et la courbe **c.** non plus.

**Conduite** : imposer l'ordre — d'abord le signe de  $a$ , qui écarte une courbe, puis l'ordonnée à l'origine, qui sépare les deux restantes. C'est la méthode, pas l'intuition.

### 3 Tester si un nombre est racine (C4)

#### Méthode — Tester un nombre en trois gestes

1. Remplacer  $x$  par le nombre à tester dans l'expression de  $f$ . 2. Calculer, en respectant les priorités : le carré d'abord. 3. Conclure : si le résultat vaut **zéro**, le nombre est une racine ; sinon, il n'en est pas une.

#### Exemple — Deux tests sur $f(x) = x^2 - 2x - 8$

**Le nombre 4 :**  $f(4) = 4^2 - 2 \times 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$ . 4 **est** une racine.

**Le nombre 1 :**  $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$ .  $-9 \neq 0$ , donc 1 **n'est pas** une racine.

#### Erreur fréquente — Le carré d'un nombre négatif est positif

Pour tester  $-2$  :  $(-2)^2 = +4$ , et non  $-4$ . Écrire les parenthèses évite l'erreur :  $f(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$ . Le nombre  $-2$  est donc lui aussi une racine.

#### Application 3 – Trois tests

On donne  $f(x) = x^2 + x - 12$ .

a. Tester les nombres 3,  $-4$  et 2.

b. Combien de racines a-t-on trouvées ? Peut-il y en avoir d'autres ? Justifier.

#### Correction — Application 3

a.  $f(3) = 9 + 3 - 12 = 0$  : 3 est une racine.  $f(-4) = (-4)^2 + (-4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$  :  $-4$  est une racine.  $f(2) = 4 + 2 - 12 = -6 \neq 0$  : 2 n'est pas une racine.

b. Deux racines, 3 et  $-4$ . Il ne peut pas y en avoir d'autres : un polynôme de degré 2 en admet au plus deux (§1).

*Conduite* : la question b. est la vraie question du chapitre. Sans elle, l'élève teste indéfiniment ; avec elle, il sait qu'il a fini.

### 4 La forme factorisée et ses racines (C6)

#### Définition — Forme factorisée

Un polynôme de degré 2 est sous **forme factorisée** lorsqu'il est écrit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Les nombres  $x_1$  et  $x_2$  sont ses **racines**, et  $a$  est le même coefficient que dans la forme développée  $ax^2 + bx + c$ .

#### Proposition — Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$  exactement lorsque  $x - x_1 = 0$  ou  $x - x_2 = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $x = x_1$  ou  $x = x_2$ . **Les racines se lisent directement dans l'écriture** : aucun calcul n'est nécessaire.

#### Exemple — Lire les racines de $f(x) = 2(x - 3)(x + 1)$

Le premier facteur s'annule pour  $x = 3$ . Le second s'écrit  $x + 1 = x - (-1)$  : il s'annule pour  $x = -1$ .

Les racines sont donc  $x_1 = 3$  et  $x_2 = -1$ , et  $\mathcal{S} = \{-1 ; 3\}$ .

*Contrôle* :  $f(3) = 2 \times 0 \times 4 = 0$  et  $f(-1) = 2 \times (-4) \times 0 = 0$ .

**Erreur fréquente — Un signe + dans le facteur donne une racine négative**

$(x+1)$  s'annule pour  $x = -1$ , pas pour  $x = 1$ . Le réflexe sûr : **chercher la valeur qui annule le facteur**, plutôt que recopier le nombre qu'on voit.

**Application 4 – Lire des racines**

Donner les racines de chacune de ces fonctions, sans développer :

**a.**  $f(x) = (x-2)(x-7)$       **b.**  $g(x) = -3(x+5)(x-1)$       **c.**  $h(x) = 4(x+2)^2$

**Correction — Application 4**

**a.**  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 7$ .

**b.**  $x_1 = -5$  et  $x_2 = 1$ . Le facteur  $-3$  ne donne aucune racine : un nombre non nul ne s'annule jamais.

**c.**  $h(x) = 4(x+2)(x+2)$  : les deux facteurs sont les mêmes, la racine  $-2$  est une **racine double**. Il n'y a qu'une seule solution.

*Conduite* : le c. prépare le §6 — une racine double, c'est la parabole qui touche l'axe sans le traverser.

**5 Sommet et axe de symétrie** (C2 et C3)**Proposition — L'axe de symétrie passe au milieu des racines** (admis)

Une parabole est **symétrique**. Son **axe de symétrie** est la droite verticale qui passe au **milieu des deux racines** :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Le **sommet** est le point de la courbe situé sur cet axe : son abscisse est  $x_S$  et son ordonnée se calcule en remplaçant  $x$  par  $x_S$  dans l'expression de  $f$ .

**Exemple — Sommet de  $f(x) = 2(x-3)(x+1)$** 

Racines :  $x_1 = 3$  et  $x_2 = -1$  (§4).

**Axe** :  $x_S = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ .

**Ordonnée** :  $f(1) = 2 \times (1-3) \times (1+1) = 2 \times (-2) \times 2 = -8$ .

Le sommet est le point  $(1; -8)$ . Comme  $a = 2 > 0$ , la parabole est tournée vers le haut : ce sommet est le point le plus **bas** de la courbe.

**Remarque — Quand la parabole touche l'axe**

Si la racine est double, les deux racines sont confondues : le milieu, c'est la racine elle-même. Le sommet est alors *sur* l'axe des abscisses.

**Erreur fréquente — Le sommet est un point, donc un couple**

Répondre « le sommet est 1 » ne dit rien : 1 est seulement son abscisse. Le sommet s'écrit  $(1; -8)$ , avec ses deux coordonnées.

**Application 5 – Trouver un sommet**

On donne  $f(x) = (x + 4)(x - 2)$ .

- Lire les deux racines.
- Calculer l'abscisse de l'axe de symétrie.
- En déduire les coordonnées du sommet, et dire s'il s'agit du point le plus haut ou du point le plus bas de la courbe.

**Correction — Application 5**

- $x_1 = -4$  et  $x_2 = 2$ .
- $x_S = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ .
- $f(-1) = (-1 + 4) \times (-1 - 2) = 3 \times (-3) = -9$ . Le sommet est  $(-1; -9)$ . Ici  $a = 1 > 0$  : c'est le point le plus **bas**.

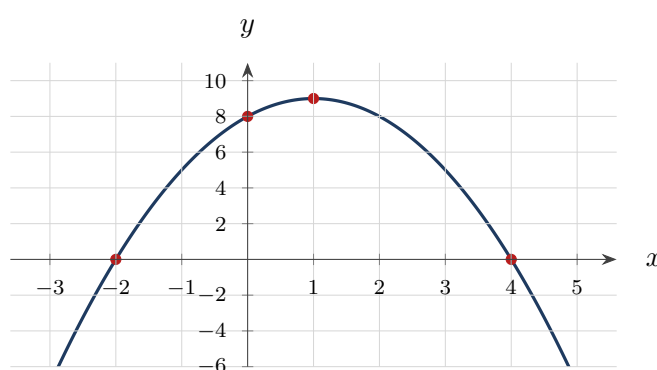
*Conduite* : faire vérifier la symétrie sur un exemple —  $f(0) = -8$  et  $f(-2) = -8$ , deux points à égale distance de l'axe  $x = -1$  ont bien la même hauteur.

**6 Donner l'allure de la parabole (C2)****Méthode — Tracer l'allure en quatre points**

À partir de  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  : **1.** placer les **racines**  $x_1$  et  $x_2$  sur l'axe horizontal ; **2.** placer l'**ordonnée à l'origine**  $f(0)$  sur l'axe vertical ; **3.** placer le **sommet**, au milieu des racines ; **4.** relier par une courbe régulière, tournée vers le haut si  $a > 0$ , vers le bas si  $a < 0$ .

**Exemple — Allure de  $f(x) = -(x + 2)(x - 4)$** 

- Racines  $-2$  et  $4$ .
- $f(0) = -(0 + 2)(0 - 4) = -(2)(-4) = 8$ .
- Axe :  $x_S = \frac{-2 + 4}{2} = 1$  ;  $f(1) = -(3)(-3) = 9$ , sommet  $(1; 9)$ .
- $a = -1 < 0$  : courbe tournée vers le bas, le sommet est le point le plus haut.



$$f(x) = -(x + 2)(x - 4)$$

Les quatre points placés : les deux racines, l'ordonnée à l'origine et le sommet. Ils suffisent à tracer l'allure.

**Erreur fréquente — Une parabole n'a pas de pointe**

Au sommet, la courbe est **arrondie**. Un tracé en forme de V ou de toit n'est pas une parabole : il faut arrondir le passage par le sommet.

**Application 6 – Une allure à décrire**

On donne  $g(x) = 2(x - 1)(x - 5)$ . Sans tracer la courbe, donner :

- a.** ses racines ; **b.** son ordonnée à l'origine ; **c.** son sommet ; **d.** le sens de sa courbure.  
**e.** Le point  $(3; 0)$  appartient-il à la courbe ? Justifier.

**Correction — Application 6**

**a.**  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 5$ . **b.**  $g(0) = 2 \times (-1) \times (-5) = 10$ . **c.**  $x_S = \frac{1+5}{2} = 3$  et  $g(3) = 2 \times 2 \times (-2) = -8$  : sommet  $(3; -8)$ . **d.**  $a = 2 > 0$  : courbe tournée vers le haut.  
**e.** Non :  $g(3) = -8$ , pas 0. Le point de la courbe d'abscisse 3 est  $(3; -8)$ . C'est justement le sommet, et il est situé 8 unités sous l'axe.

*Conduite* : la question e. traque la confusion entre « abscisse du sommet » et « racine ». Les deux se calculent avec les mêmes nombres, elles ne désignent pas la même chose.

**7 Le signe d'un polynôme factorisé (C6)**

Étudier le signe de  $f$ , c'est dire sur quelles portions  $f(x)$  est positif et sur lesquelles il est négatif. Sur la forme factorisée, cela se fait dans un **tableau de signes**.

**Méthode — Dresser un tableau de signes en quatre étapes**

- 1.** Repérer les racines et les ranger dans l'ordre croissant. **2.** Tracer un tableau dont la première ligne porte  $x$ , puis les racines. **3.** Donner le signe de chaque facteur :  $x - x_1$  est négatif avant  $x_1$ , positif après. **4.** Multiplier les signes colonne par colonne, sans oublier le signe de  $a$ .

**Exemple — Signe de  $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$** 

Racines :  $-1$  et  $2$ , rangées dans cet ordre. Coefficient  $a = 3 > 0$ .

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x + 1$ |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x - 2$ |           | $-$  | $-$ | $0$       |
| $f(x)$  |           | $+$  | $0$ | $-$       |

$f(x)$  est **positif** sur  $] -\infty; -1]$  et sur  $[2; +\infty[$ , et **négatif** sur  $[-1; 2]$ .

**À retenir**

Quand  $a > 0$ , le polynôme est **négatif entre les racines** et positif à l'extérieur. Quand  $a < 0$ , c'est l'inverse. Un tableau de signes n'est donc jamais une surprise : il confirme ce que l'allure de la courbe montre déjà.

**Erreur fréquente — Ne pas oublier le signe de  $a$** 

Avec  $f(x) = -2(x - 1)(x - 3)$ , les deux facteurs donnent le même tableau qu'avec  $a > 0$ , mais le  $-2$  **inverse toute la dernière ligne** :  $f$  est positif entre 1 et 3.

**Application 7 – Un tableau de signes**

Dresser le tableau de signes de  $f(x) = (x+3)(x-1)$ , puis écrire l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $f(x) \leq 0$ .

**Correction — Application 7**

Racines  $-3$  et  $1$ , coefficient  $a = 1 > 0$ .

| $x$    | $-\infty$ | $-3$ |     | $1$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x+3$  |           | $-$  | $0$ | $+$ | $+$       |
| $x-1$  |           | $-$  |     | $-$ | $0$       |
| $f(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$       |

$f(x) \leq 0$  sur  $[-3; 1]$  : les bornes sont incluses, puisque l'inégalité est large et que  $f$  s'y annule.

**Conduite** : faire justifier le résultat par l'allure —  $a > 0$ , donc la courbe plonge sous l'axe entre les racines. Le tableau doit confirmer le dessin, pas le remplacer.

**8 Factoriser quand on connaît les racines (C5)**

C'est le chemin inverse du §4 : on part de la forme développée et des racines, on aboutit à la forme factorisée.

**Méthode — Factoriser en trois étapes**

1. Relever le coefficient  $a$ , celui de  $x^2$ .
2. Écrire  $a(x-x_1)(x-x_2)$  en remplaçant  $x_1$  et  $x_2$  par les racines connues.
3. **Contrôler** en développant, ou en testant une valeur.

**Exemple — Factoriser  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ , de racines 3 et 4**

1.  $a = 1$ .
2.  $f(x) = 1 \times (x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)$ .
3. Contrôle par développement :  $(x-3)(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$ . C'est bien  $f$ .

**Remarque — Le coefficient  $a$  ne s'invente pas**

Pour  $g(x) = 2x^2 - 10x + 12$ , de racines 2 et 3, la forme factorisée est  $2(x-2)(x-3)$  et non  $(x-2)(x-3)$  : sans le 2, le développement donnerait  $x^2 - 5x + 6$ , qui est la moitié de  $g$ .

**Erreur fréquente — Factoriser demande des racines connues**

Ce chapitre ne demande jamais de *deviner* des racines. Elles sont soit données par l'énoncé, soit trouvées par un test (§3), soit évidentes — par exemple quand  $x$  se met en facteur, comme dans  $x^2 - 5x = x(x-5)$ .

**Application 8 – Deux factorisations**

- a. Factoriser  $f(x) = x^2 - x - 6$ , sachant que ses racines sont  $-2$  et  $3$ . Contrôler par développement.
- b. Factoriser  $g(x) = x^2 - 6x$  en remarquant une racine évidente.

**Correction — Application 8**

a.  $a = 1$ , donc  $f(x) = (x+2)(x-3)$ . Contrôle :  $(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$ .  
✓

b.  $x$  se met en facteur :  $g(x) = x(x-6)$ . Les racines sont 0 et 6.

**Conduite** : le b. est le seul cas où l'élève trouve lui-même une racine sans qu'on la lui donne. Le signaler comme tel : c'est l'un des trois cas que le programme autorise.

## 9 La deuxième solution, quand on en connaît une (C7)

### Méthode — Deux chemins, au choix

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , dont on sait qu'une solution de  $f(x) = 0$  est  $x_1$ .

**Chemin graphique.** Si la courbe est fournie, lire l'abscisse  $x_S$  de l'axe de symétrie : la seconde racine est son **symétrique**,  $x_2 = 2x_S - x_1$ .

**Chemin par l'écriture factorisée.**  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ . En développant, le terme constant vaut  $a x_1 x_2$ , et il est égal à  $c$ . Donc  $x_2 = \frac{c}{a x_1}$ , dès que  $x_1 \neq 0$ .

### Exemple — Seconde racine de $f(x) = x^2 - 9x + 20$ , sachant que 4 en est une

**Contrôle d'abord :**  $f(4) = 16 - 36 + 20 = 0$ . ✓

**Par l'écriture factorisée :**  $a = 1$  et  $c = 20$ , donc  $x_2 = \frac{20}{1 \times 4} = 5$ .

**Vérification :**  $f(5) = 25 - 45 + 20 = 0$ . ✓ La forme factorisée est  $(x - 4)(x - 5)$ .

### Remarque — Ce ne sont pas des formules à mémoriser

$x_1 + x_2$  et  $x_1 x_2$  ne sont pas au programme de ce module comme des formules. Ce qui est au programme, c'est la **forme factorisée** : le calcul ci-dessus n'en est que la lecture, et il se refait à chaque fois en développant.

### Erreur fréquente — Toujours vérifier la racine trouvée

La méthode suppose que  $x_1$  est vraiment une racine. Si l'énoncé se trompe ou si l'on a mal recopié, le résultat est faux sans prévenir. Un contrôle  $f(x_2) = 0$  coûte trois lignes.

### Application 9 – Retrouver la seconde racine

On donne  $f(x) = x^2 - 2x - 15$  et l'on sait que 5 est une racine.

- Vérifier que 5 est bien une racine.
- En déduire la seconde racine.
- Écrire la forme factorisée de  $f$ , puis contrôler par développement.

#### Correction — Application 9

a.  $f(5) = 25 - 10 - 15 = 0$ . ✓

b.  $a = 1$  et  $c = -15$ , donc  $x_2 = \frac{-15}{1 \times 5} = -3$ . Contrôle :  $f(-3) = 9 + 6 - 15 = 0$ . ✓

c.  $f(x) = (x - 5)(x + 3)$ . Développement :  $x^2 + 3x - 5x - 15 = x^2 - 2x - 15$ . ✓

**Conduite :** exiger le contrôle du b. autant que le résultat. Sans lui, l'élève ne sait pas s'il a trouvé une racine ou commis une faute de signe.

## 10 Outil numérique et balayage (C1 à C3)

Le programme demande que les propriétés de ce chapitre soient **admises après observation** de courbes obtenues à l'outil numérique. Trois outils suffisent.

### Méthode — Obtenir la parabole en classe

**Calculatrice graphique** ou **logiciel de géométrie dynamique** (GeoGebra) : saisir l'expression, régler la fenêtre, lire les points de rencontre avec l'axe.

**Tableur** : une colonne de valeurs de  $x$ , une colonne  $=A2^2-2*A2-2$  recopiée vers le bas, puis « nuage de points reliés ».

**Python** : une boucle qui affiche  $x$  et  $f(x)$  de proche en proche.

Lorsque le polynôme **n'est pas** sous forme factorisée et qu'aucune racine n'est connue ni évidente, le programme ne demande pas de calcul exact : il demande une **valeur approchée**, obtenue par un solveur ou par **balayage**.

### Définition — Balayer un intervalle

Balayer, c'est calculer  $f(x)$  de proche en proche, avec un **pas** constant, jusqu'à ce que le résultat **change de signe**. Entre les deux dernières valeurs testées, la courbe traverse l'axe : il y a une racine.

### Exemple — Encadrer une racine de $f(x) = x^2 - 2x - 2$ entre 2 et 3

**Aux bornes** :  $f(2) = 4 - 4 - 2 = -2$  et  $f(3) = 9 - 6 - 2 = +1$ . Le signe change : il y a bien une racine entre 2 et 3.

**Pas de 0,1** :  $f(2,7) = 7,29 - 5,4 - 2 = -0,11$  et  $f(2,8) = 7,84 - 5,6 - 2 = +0,24$ . D'où l'encadrement  $2,7 < x < 2,8$ .

**Un pas de plus** pour choisir l'arrondi :  $f(2,75) = 7,5625 - 5,5 - 2 = +0,0625$ , donc la racine est entre 2,7 et 2,75 :

$$x \approx 2,7 \text{ au dixième près}$$

### Méthode — Le même balayage en Python

```

1 def f(x):
2     return x**2 - 2*x - 2
3
4 x = 2
5 while f(x) < 0: # tant que f est en dessous de l'axe
6     x = x + 0.1
7 print(round(x - 0.1, 1), "<= racine <=", round(x, 1))

```

Le programme s'arrête au premier  $x$  pour lequel  $f$  est devenue positive, et affiche l'encadrement obtenu.

### Erreur fréquente — Le balayage ne donne jamais la valeur exacte

Il donne un **encadrement**, donc une valeur *approchée* : on écrit  $\approx$ , jamais  $=$ . Et tant que l'encadrement reste  $2,7 < x < 2,8$ , aucune des deux bornes n'est l'arrondi : il faut resserrer avant de conclure.

**Application 10 – Encadrer une racine**

On sait que  $f(x) = x^2 - x - 3$  a une racine entre 2 et 3.

- Calculer  $f(2)$  et  $f(3)$ , et vérifier le changement de signe.
- Balayer au pas de 0,5, puis donner un encadrement.
- Poursuivre au pas de 0,1, puis écrire la valeur approchée au dixième, avec le bon symbole.

**Correction — Application 10**

- $f(2) = 4 - 2 - 3 = -1$  et  $f(3) = 9 - 3 - 3 = +3$  : le signe change, il y a une racine entre 2 et 3.
- $f(2,5) = 6,25 - 2,5 - 3 = +0,75$  : déjà positif. L'encadrement se resserre en  $2 < x < 2,5$ .
- $f(2,3) = 5,29 - 2,3 - 3 = -0,01$  et  $f(2,4) = 5,76 - 2,4 - 3 = +0,36$  : l'encadrement est  $2,3 < x < 2,4$ . Un pas de plus :  $f(2,35) = 5,5225 - 2,35 - 3 = +0,1725$ , donc la racine est entre 2,3 et 2,35 :  $x \approx 2,3$ .

*Conduite* : faire remarquer que  $f(2,3)$  vaut  $-0,01$ , tout près de zéro sans l'être. C'est exactement ce que le balayage sait dire, et tout ce qu'il sait dire.

**11 Bivalence : la puissance dans un circuit** (C4 et C6)

Le programme rattache ce module au domaine **Électricité** de physique-chimie. Voici la situation la plus directe : un polynôme de degré 2 y apparaît *déjà factorisé*.

Une pile de force électromotrice  $E = 12\text{ V}$  et de résistance interne  $r = 2\Omega$  alimente un moteur.

Tension aux bornes du moteur  $U = E - rI = 12 - 2I$

Puissance reçue par le moteur  $P = U \times I$ , soit  $P(I) = I(12 - 2I)$

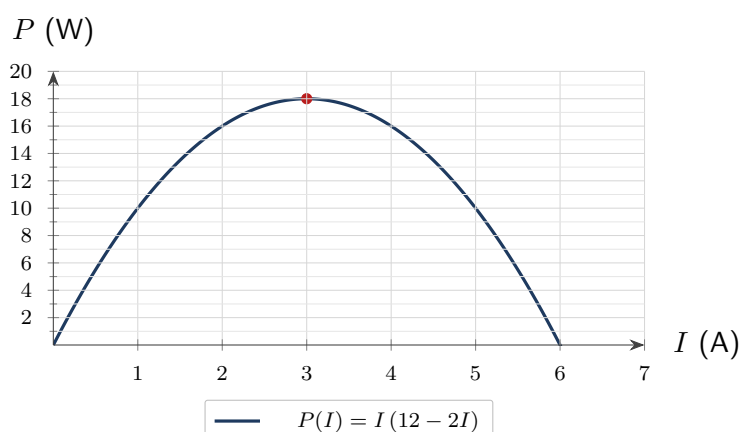
$P$  est bien un polynôme de degré 2 en  $I$ , donné sous **forme factorisée** : ses deux facteurs sont  $I$  et  $12 - 2I$ .

**Exemple — Lire la situation sur la forme factorisée**

**Racines** :  $I = 0$ , et  $12 - 2I = 0$  donne  $I = 6\text{ A}$ . La puissance reçue par le moteur est **nulle** dans ces deux cas — courant nul d'un côté, tension nulle de l'autre.

**Axe de symétrie** :  $I_S = \frac{0 + 6}{2} = 3\text{ A}$ .

**Maximum** :  $P(3) = 3 \times (12 - 6) = 3 \times 6 = 18\text{ W}$ . Comme le coefficient de  $I^2$  vaut  $-2 < 0$ , la parabole est tournée vers le bas : ce sommet est bien le point le plus haut.



La puissance reçue par le moteur est maximale pour une intensité de 3 A, et elle vaut alors 18 W.

**Remarque — Ce que le modèle dit, et ce qu'il ne dit pas**

$P(I) = I(12 - 2I)$  décrit la puissance *reçue par le moteur*, pas celle fournie par la pile. Le modèle suppose aussi que  $E$  et  $r$  restent constants, ce qui n'est vrai que sur une plage limitée : une pile qui se décharge voit sa résistance interne augmenter.

**Application 11 – Un autre générateur**

Une alimentation de force électromotrice  $E = 20\text{ V}$  et de résistance interne  $r = 2\ \Omega$  alimente un récepteur. La puissance reçue s'écrit  $P(I) = I(20 - 2I)$ , avec  $I$  en ampères et  $P$  en watts.

- Pour quelles intensités la puissance reçue est-elle nulle ?
- Pour quelle intensité est-elle maximale ? Combien vaut-elle alors ?
- Vérifier que l'intensité 4 A et l'intensité 6 A donnent la même puissance. Pourquoi était-ce prévisible ?

**Correction — Application 11**

- $P(I) = 0$  pour  $I = 0$  et pour  $20 - 2I = 0$ , c'est-à-dire  $I = 10\text{ A}$ .
- $I_S = \frac{0 + 10}{2} = 5\text{ A}$  et  $P(5) = 5 \times (20 - 10) = 5 \times 10 = 50\text{ W}$ .
- $P(4) = 4 \times 12 = 48\text{ W}$  et  $P(6) = 6 \times 8 = 48\text{ W}$ . C'était prévisible : 4 et 6 sont **symétriques** par rapport à l'axe  $I = 5$ , et une parabole est symétrique par rapport à son axe.

*Conduite* : la question c. relie le §5 à une grandeur physique. Deux réglages différents d'un même circuit peuvent délivrer la même puissance : c'est la symétrie de la parabole, et c'est un fait d'atelier.

**Bilan – Je sais faire****À retenir**

Tout part de la forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Elle donne les **racines**  $x_1$  et  $x_2$ , l'**axe de symétrie** au milieu des racines, le **sommet** sur cet axe, et le **signe** par un tableau. Le signe de  $a$  donne le sens de la courbure, et  $f(0)$  l'ordonnée à l'origine.

**Méthode — Choisir la bonne méthode**

- « **Combien de solutions ?** » : compter les points de rencontre avec l'axe horizontal (§1).
- « **Quelle courbe va avec quelle expression ?** » : signe de  $a$ , puis ordonnée à l'origine (§2).
- « **Ce nombre est-il racine ?** » : le remplacer et regarder si l'on obtient zéro (§3).
- **Le polynôme est factorisé** : les racines se lisent, le signe se tabule (§4 et §7).
- **On connaît les racines** : écrire  $a(x - x_1)(x - x_2)$  et contrôler en développant (§8).
- **On connaît une racine** : la seconde vient de la symétrie ou de l'écriture factorisée (§9).
- **Rien de tout cela** : outil numérique, puis balayage, et l'on écrit  $\approx$  (§10).

**Méthode — Vérifier sa réponse**

1. Ai-je contrôlé chaque racine en calculant  $f$  à cette valeur ?
2. Ma forme factorisée redonne-t-elle la forme développée ?
3. Mon tableau de signes est-il cohérent avec le signe de  $a$  ?
4. Ai-je écrit le sommet comme un *couple* ?
5. Ai-je écrit  $\approx$  pour une valeur obtenue par balayage, et son unité ?

**Remarque — Ce que ce chapitre ne demande pas**

Le calcul des racines par le **discriminant** ne figure pas au programme de ce module : il n'est employé nulle part ici. Pour résoudre  $f(x) = 0$ , on se limite aux trois cas prévus : le polynôme est factorisé, une racine est connue, ou une racine est évidente. Dans tous les autres cas, on donne une valeur approchée.