

C7 – Déterminer une probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Exigible. Prérequis : C6.

Rappel de cours

La probabilité que B se réalise **sachant que** A est réalisé se note $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{avec } P(A) \neq 0$$

Dans un tableau d'effectifs, cela revient à diviser la case $A \cap B$ par le total de A : c'est la fréquence conditionnelle de la capacité précédente.

Attention : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont pas interchangeables ; leurs valeurs peuvent coïncider. Dire « 70 % des pièces défectueuses viennent de l'atelier 1 » n'est pas dire « 70 % des pièces de l'atelier 1 sont défectueuses ».

Exercice 25 — Deux défauts, deux lectures

Un contrôle porte sur 100 pièces automobiles, selon deux critères : la surface et la dimension.

	Défaut de dimension	Pas de défaut de dimension	Total
Défaut de surface	5	10	15
Pas de défaut de surface	8	77	85
Total	13	87	100

On note A « la pièce a un défaut de surface » et B « la pièce a un défaut de dimension ».

- Calculer $P_A(B)$ en utilisant la formule, puis vérifier le résultat directement dans le tableau.
- Calculer $P_B(A)$.
- A-t-on $P_A(B) = P_B(A)$? Expliquer en nommant le groupe de référence de chaque calcul.

Correction de l'exercice 25

- a. $P(A \cap B) = \frac{5}{100} = 0,05$ et $P(A) = \frac{15}{100} = 0,15$, donc

$$P_A(B) = \frac{0,05}{0,15} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Vérification par les effectifs : $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

- b. $P_B(A) = \frac{0,05}{0,13} = \frac{5}{13} \approx 0,385$.

c. Non. Au a., le groupe de référence est celui des 15 pièces ayant un défaut de surface ; au b., celui des 13 pièces ayant un défaut de dimension. Même numérateur (5 pièces), dénominateurs différents : « B sachant A » et « A sachant B » ne sont pas la même question.

Exercice 26 — Des pommes de catégorie 1

Un lot de 200 pommes est contrôlé à la coopérative. Le tableau donne la fréquence de chaque catégorie de pommes dans le lot.

	Catégorie 1	Autre catégorie	Total
Biologique	0,12	0,18	0,30
Non biologique	0,33	0,37	0,70
Total	0,45	0,55	1

On choisit une pomme au hasard. On note A l'événement « la pomme est issue de l'agriculture biologique » et B l'événement « la pomme est de catégorie 1 ».

- Calculer $P_A(B)$ et traduire le résultat par une phrase.
- Calculer $P_B(A)$ et traduire le résultat par une phrase.
- Les pommes biologiques sont-elles davantage représentées parmi les pommes de catégorie 1 que dans l'ensemble du lot ? Justifier.
- Combien de pommes du lot sont à la fois biologiques et de catégorie 1 ?

Correction de l'exercice 26

On lit dans le tableau : $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,45$ et $P(A \cap B) = 0,12$.

- a. On applique la formule :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,30} = 0,40$$

« Parmi les pommes biologiques, 40 % sont de catégorie 1. »

- b. On applique la formule :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,45} = \frac{4}{15} \approx 0,267$$

« Parmi les pommes de catégorie 1, environ 26,7 % sont biologiques. »

- Non. Dans l'ensemble du lot, les pommes biologiques représentent 30 % ; parmi les pommes de catégorie 1, elles n'en représentent qu'environ 26,7 %. Elles y sont donc légèrement *moins* représentées.
- $200 \times 0,12 = 24$ pommes.

Exercice 27 — *Faut-il remplacer la machine de découpe ?*

Un atelier d'agencement découpe ses panneaux sur deux centres d'usinage à commande numérique. Sur un mois, le chef d'atelier relève l'origine de chaque panneau découpé et le nombre de panneaux mis au rebut.

Machine	Panneaux découpés	Panneaux rebutés
Ancienne	400	36
Récente	300	12
Total	700	48

Donnée	Valeur
Perte pour un panneau rebuté	45 €
Prix d'un centre d'usinage neuf pour remplacer l'ancien	90 000 €

- On prélève un panneau au hasard parmi les 700. Calculer la probabilité qu'il ait été rebuté.
- Comparer les deux machines sur ce critère. Expliquer pourquoi comparer 36 et 12 ne suffit pas.
- Si les 700 panneaux étaient découpés sur une machine récente, combien de rebuts attendrait-on ? En déduire le gain mensuel du remplacement.
- Au bout de combien de mois l'investissement serait-il remboursé ? Conclure par une recommandation, en signalant deux limites de l'estimation.

Correction de l'exercice 27

a. $P(\text{rebut}) = \frac{48}{700} = \frac{12}{175} \approx 0,069$, soit environ 6,9 %.

- b. On se restreint successivement à chaque machine :

$$P_{\text{ancienne}}(\text{rebut}) = \frac{36}{400} = 0,09 \quad P_{\text{récente}}(\text{rebut}) = \frac{12}{300} = 0,04$$

soit 9 % contre 4 %. Comparer 36 et 12 ne suffit pas : les deux machines n'ont pas découpé le même nombre de panneaux (400 contre 300).

- c. $700 \times 0,04 = 28$ rebuts attendus au lieu de 48, soit 20 panneaux sauvés par mois :

$$20 \times 45 = 900 \text{ € par mois}$$

- d. On divise le prix de la machine par le gain mensuel :

$$\frac{90\,000}{900} = 100 \text{ mois, soit 8 ans et 4 mois.}$$

Recommandation attendue : sur le seul poste des rebuts, le remplacement mettrait plus de 8 ans à être remboursé. Ce gain ne suffit pas à justifier l'achat ; il faudrait d'autres gains chiffrés (cadence, pannes évitées) pour le rendre intéressant.

Deux limites : **(1)** le taux de 4 % est une fréquence observée sur un seul mois et rien ne garantit qu'il se maintienne, ni que les deux machines traitent des panneaux comparables ; **(2)** cadence, maintenance, financement, installation et formation ne sont pas chiffrés ici.

Variante acceptable : raisonner à l'année ($12 \times 900 = 10\,800$ € par an, puis $90\,000 \div 10\,800 \approx 8,3$ ans).

Exercice 28 — *L'objectif de réemploi d'une ressourcerie*

Une ressourcerie collecte des objets déposés par des particuliers et par des entreprises. Chaque objet est orienté vers une seule filière. Le bilan du trimestre porte sur 1 500 objets.

	Réemploi	Recyclage	Élimination	Total
Particuliers	450	315	135	900
Entreprises	240	240	120	600
Total	690	555	255	1 500

La convention signée avec la collectivité fixe un objectif : **au moins 50 % des objets reçus doivent partir au réemploi.**

- On choisit un objet au hasard. Calculer la probabilité qu'il parte au réemploi.
- Calculer la probabilité qu'il provienne d'un particulier *ou* qu'il parte au réemploi.
- L'objectif est-il atteint ? Combien d'objets manque-t-il ?
- Calculer le taux de réemploi à l'intérieur de chaque catégorie de déposants. Sur laquelle faut-il agir ? Montrer par le calcul qu'aligner cette catégorie sur l'autre suffirait exactement à atteindre l'objectif.

Correction de l'exercice 28

a. $P(\text{réemploi}) = \frac{690}{1\,500} = 0,46$, soit 46 %.

- b. Les deux événements ne sont pas incompatibles (450 objets vérifient les deux) :

$$P(\text{particulier} \cup \text{réemploi}) = \frac{900}{1\,500} + \frac{690}{1\,500} - \frac{450}{1\,500} = \frac{1\,140}{1\,500} = 0,76$$

Vérification par les effectifs : $900 + 690 - 450 = 1\,140$.

- c. Non : $0,46 < 0,50$. Il faudrait $0,50 \times 1\,500 = 750$ objets réemployés au lieu de 690, soit **60 objets** à réorienter sur le trimestre.

- d. On se restreint à chaque ligne du tableau :

$$\text{Particuliers : } \frac{450}{900} = 0,50 \qquad \text{Entreprises : } \frac{240}{600} = 0,40$$

Les dépôts des particuliers atteignent déjà l'objectif ; ce sont ceux des entreprises qui tirent le résultat vers le bas. Si les entreprises passaient à 50 %, elles fourniraient $600 \times 0,50 = 300$ objets réemployés au lieu de 240, soit exactement les 60 objets manquants. Le total deviendrait $450 + 300 = 750$, soit

$$\frac{750}{1\,500} = 0,50$$

L'objectif serait atteint.

Lecture fautive à écarter : « les particuliers déposent 450 objets réemployables contre 240 pour les entreprises, donc ils trient mieux » — sans les taux, cette phrase compare des groupes d'effectifs différents (900 contre 600).

Exercice 29 — Où concentrer la maintenance préventive ?

Un service de maintenance industrielle suit trois lignes de production. Sur un trimestre, il a enregistré pour chaque ligne le nombre de cycles de fabrication réalisés et le nombre d'arrêts non programmés. Le responsable dispose d'un budget d'heures qu'il ne peut affecter qu'à *une seule* ligne.

Ligne	Cycles réalisés	Arrêts non programmés
Ligne 1	480	24
Ligne 2	300	21
Ligne 3	220	22
Total	1 000	67

- On prélève un cycle au hasard parmi les 1 000. Calculer la probabilité qu'il se termine par un arrêt non programmé.
- Calculer la fréquence d'arrêt à l'intérieur de chaque ligne.
- Sur quelle ligne le budget doit-il être affecté ? Justifier.
- Si l'action ramenait cette ligne au meilleur taux constaté, combien d'arrêts seraient évités sur le trimestre ? De quel pourcentage le total du site baisserait-il ?
- Expliquer pourquoi un classement des lignes par *nombre* d'arrêts conduirait à une mauvaise décision.

Correction de l'exercice 29

a. $P(\text{arrêt}) = \frac{67}{1\,000} = 0,067$, soit 6,7 %.

- b. On se restreint à chaque ligne :

$$\frac{24}{480} = 0,05 \quad \frac{21}{300} = 0,07 \quad \frac{22}{220} = 0,10$$

soit 5 %, 7 % et 10 %.

- c. La ligne 3 : son taux d'arrêt (10 %) est le double de celui de la ligne 1 et une fois et demie celui de l'ensemble du site. Un cycle sur dix y échoue.

- d. Au taux de la ligne 1 : $220 \times 0,05 = 11$ arrêts au lieu de 22, soit 11 arrêts évités. Le total du site passerait de 67 à 56 arrêts :

$$\frac{67 - 56}{67} \approx 0,164$$

soit une baisse d'environ 16 %.

- e. Ce classement placerait la ligne 1 en tête (24 arrêts, devant 22 et 21) et ferait porter l'effort sur la ligne la *plus* fiable du site. La ligne 1 n'a beaucoup d'arrêts que parce qu'elle réalise beaucoup de cycles (480 sur 1 000) : c'est un effet de volume, pas de fiabilité. Seul le rapport arrêts/cycles compare ce qui est comparable.

Variante acceptable : raisonner en nombre de cycles entre deux arrêts (10 pour la ligne 3, 14 pour la ligne 2, 20 pour la ligne 1) et conclure de même.