

C5 – Calculer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$; utiliser $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exigible. Prérequis : C3, C4.

Rappel de coursPour deux événements **quelconques** :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B$ se lit « A **ou** B » (au moins l'un des deux) ; $A \cap B$ se lit « A **et** B » (les deux à la fois).

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ et la formule redonne $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La même formule, réarrangée, donne aussi $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Exercice 16 — Deux logiciels dans une entreprise

Dans une entreprise de 80 employés, on choisit un employé au hasard. On note :

Donnée	Valeur
$P(A)$: l'employé maîtrise un tableur	0,60
$P(B)$: l'employé maîtrise un logiciel de dessin technique	0,45
$P(A \cap B)$: il maîtrise les deux	0,25

- Calculer $P(A \cup B)$.
- Interpréter ce résultat par une phrase.
- Calculer la probabilité qu'un employé ne maîtrise ni l'un ni l'autre.
- Combien d'employés cela représente-t-il ?

Correction de l'exercice 16

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,60 + 0,45 - 0,25 = 0,80$.

b. 80 % des employés maîtrisent au moins un des deux outils.

c. « Ni l'un ni l'autre » est le contraire de « au moins un » : $1 - 0,80 = 0,20$.

d. $80 \times 0,20 = 16$ employés.

Contrôle : tableur seul $0,60 - 0,25 = 0,35$; dessin seul $0,45 - 0,25 = 0,20$; les deux 0,25 ; aucun 0,20.

Somme : $0,35 + 0,20 + 0,25 + 0,20 = 1$.

Exercice 17 — Le stock de planches

Un menuisier a 60 planches en stock.

Donnée	Valeur
Planches en stock	60
Planches en chêne (C)	24
Planches rabotées (R)	30
Planches en chêne et rabotées	12

Il prend une planche au hasard.

- Calculer $P(C)$, $P(R)$ et $P(C \cap R)$.
- Calculer $P(C \cup R)$ et interpréter le résultat.
- En déduire la probabilité que la planche ne soit ni en chêne ni rabotée, puis le nombre de planches concernées.
- Vérifier le résultat de la question c. en détaillant les quatre catégories de planches.

Correction de l'exercice 17

a. $P(C) = \frac{24}{60} = 0,40$; $P(R) = \frac{30}{60} = 0,50$; $P(C \cap R) = \frac{12}{60} = 0,20$.

- b. Les deux événements ne sont pas incompatibles (12 planches sont dans les deux catégories) :

$$P(C \cup R) = 0,40 + 0,50 - 0,20 = 0,70$$

Il y a 70 % de chances que la planche soit en chêne ou rabotée (ou les deux).

c. $P(\overline{C \cup R}) = 1 - 0,70 = 0,30$, soit $60 \times 0,30 = 18$ planches.

d. Chêne seul : $24 - 12 = 12$; rabotée seule : $30 - 12 = 18$; les deux : 12 ; ni l'un ni l'autre : 18. Total : $12 + 18 + 12 + 18 = 60$.

Exercice 18 — Retrouver l'intersection

Dans une entreprise de logistique de 200 employés, on choisit un employé au hasard. On sait que :

Donnée	Valeur
$P(A)$: l'employé travaille de nuit	0,35
$P(B)$: l'employé possède une habilitation de conduite	0,50
$P(A \cup B)$	0,65

- Calculer $P(A \cap B)$. Détailler la transformation de la formule.
- Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier.
- Combien d'employés travaillent de nuit et possèdent l'habilitation ?

Correction de l'exercice 18

- a. On part de $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et on isole l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,35 + 0,50 - 0,65 = 0,20$$

- Non : $P(A \cap B) = 0,20 \neq 0$, donc $A \cap B \neq \emptyset$. Certains employés cumulent le travail de nuit et l'habilitation de conduite.
- $200 \times 0,20 = 40$ employés.

Exercice 19 — « Les deux causes sont incompatibles »

Un conducteur de travaux retient deux causes de retard : les intempéries (I) et la rupture d'approvisionnement (R). Les deux peuvent survenir sur un même chantier.

Donnée	Valeur
$P(I)$	0,25
$P(R)$	0,18
$P(I \cap R)$	0,07
Chantiers prévus l'an prochain	120

Dans sa note de synthèse, il écrit : « Les deux causes de retard sont incompatibles, il suffit donc d'additionner : la probabilité qu'un chantier prenne du retard vaut $0,25 + 0,18 = 0,43$. Sur les 120 chantiers prévus, 52 seront en retard. »

- Réfuter son raisonnement en identifiant précisément l'erreur commise.
- Reprendre le calcul correctement.
- En déduire la probabilité qu'un chantier ne connaisse aucune de ces deux causes de retard.
- Corriger la prévision sur les 120 chantiers et chiffrer l'écart avec l'annonce initiale.

Correction de l'exercice 19

a. Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide, donc lorsque $P(I \cap R) = 0$. Ici $P(I \cap R) = 0,07 \neq 0$: 7 % des chantiers cumulent les deux causes. En additionnant $P(I)$ et $P(R)$, le conducteur de travaux compte ces chantiers **deux fois**.

b. Il faut retirer une fois les chantiers qui cumulent les deux causes :

$$P(I \cup R) = P(I) + P(R) - P(I \cap R) = 0,25 + 0,18 - 0,07 = 0,36$$

La probabilité qu'un chantier connaisse au moins l'une des deux causes est 0,36, et non 0,43. Ce calcul ne tient pas compte des autres causes de retard possibles.

- $P(\overline{I \cup R}) = 1 - 0,36 = 0,64$: 64 % des chantiers échappent à ces deux causes.
- $120 \times 0,36 = 43,2$, soit environ 43 chantiers. L'annonce initiale ($120 \times 0,43 = 51,6$, soit 52 chantiers) surestime le risque de $51,6 - 43,2 = 8,4$, soit environ 8 chantiers.

Exercice 20 — Une probabilité qui dépasse 1

Un club de triathlon compte 180 licenciés.

Donnée	Valeur
Licenciés du club	180
Créneau natation (N)	96
Créneau vélo (V)	120
Les deux créneaux	54

Un membre du bureau calcule la probabilité qu'un licencié tiré au sort fréquente au moins un des deux créneaux :

$$\text{« } P(N \cup V) = \frac{96}{180} + \frac{120}{180} = \frac{216}{180} = 1,2, \text{ donc } 120\% \text{ des licenciés s'entraînent. »}$$

- Expliquer, *sans calcul supplémentaire*, pourquoi ce résultat est nécessairement faux.
- Identifier l'erreur, puis calculer correctement $P(N \cup V)$.
- Déterminer le nombre de licenciés qui ne fréquentent aucun des deux créneaux.
- Calculer la probabilité qu'un licencié fréquente *exactement un* des deux créneaux.

Correction de l'exercice 20

- Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Le nombre 1,2 est donc impossible, et « 120 % des licenciés » n'a pas de sens : on ne peut pas dépasser l'effectif du club.
- Les deux événements ne sont pas incompatibles : 54 licenciés fréquentent les deux créneaux et ont été comptés deux fois. Il faut retirer l'intersection :

$$P(N \cup V) = \frac{96}{180} + \frac{120}{180} - \frac{54}{180} = \frac{162}{180} = 0,90$$

- $P(\overline{N \cup V}) = 1 - 0,90 = 0,10$, soit $180 \times 0,10 = 18$ licenciés.
- Natation seule : $96 - 54 = 42$; vélo seul : $120 - 54 = 66$. Ces deux événements sont incompatibles :

$$P(\text{exactement un}) = \frac{42}{180} + \frac{66}{180} = \frac{108}{180} = 0,60$$

Contrôle : $42 + 54 + 66 + 18 = 180$.